



TITLE:

浅海における有限振幅波理論とその適用に関する研究(  
Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

安田, 孝志

---

CITATION:

安田, 孝志. 浅海における有限振幅波理論とその適用に関する研究. 京都大学, 1979, 工学博士

ISSUE DATE:

1979-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r3812>

RIGHT:

浅海における有限振幅波理論と  
その適用に関する研究

昭和53年10月

安 田 孝 志

# 浅海における有限振幅波理論と その適用に関する研究

昭和53年10月

安 田 孝 志

# 目 次

第 1 章 緒 論 .....	1
第 2 章 クノイド波理論に関する研究 .....	7
第 1 節 概 説 .....	7
第 2 節 新しいクノイド波理論 .....	9
第 3 節 新しいクノイド波理論の適用性 .....	52
第 4 節 結 語 .....	68
第 3 章 擬 Stokes 波理論に関する研究 .....	73
第 1 節 概 説 .....	73
第 2 節 擬 Stokes 波理論 .....	73
第 3 節 擬 Stokes 波の特性 .....	87
第 4 節 結 語 .....	103
第 4 章 一様流を伴う有限振幅波理論に関する研究 .....	105
第 1 節 概 説 .....	105
第 2 節 一様流を伴うクノイド波理論 .....	106
第 3 節 一様流を伴う擬 Stokes 波理論 .....	111
第 4 節 一様流を伴う有限振幅波の特性 .....	113
第 5 節 結 語 .....	127
第 5 章 浅海における波の変形に関する研究 .....	130
第 1 節 概 説 .....	130
第 2 節 基礎方程式の誘導 .....	131
第 3 節 傾斜海浜における波の変形 .....	135
第 4 節 流れによる波の変形 .....	137
第 5 節 結 語 .....	139
第 6 章 結 論 .....	143

# 第 1 章 緒 論

白砂青松の砂浜や奇岩奇勝の海岸は、変化に富んだ美しい風景をわれわれに提供してくれている。こうした美しい海岸の風景も、波の過程を経て運ばれてくる莫大なエネルギーの所産にほかならず、このことはまた海岸が地球上で最も活動的な場所の一つであることを示すものと言えよう。これは、石原<sup>1)</sup>が1954年に開催されたわが国における第1回海岸工学研究発表会論文集の冒頭に述べた言葉を著者なりに言い換えたものであるが、海岸の本質を言い当てた名言であろうと思われる。

このように海岸は波の過程を経て運ばれてくる莫大なエネルギーによって形成されてきたものであり、いまだその過程にあるものもあるが、なかには来襲する波に応じて変化しつつ一般にある平衡状態に達しているものも少なくない。したがって、後者のような海岸で河口の切り換えや各種の海岸構造物の築造によって海岸の動態を急変させることは、自然が維持してきた平衡状態を乱すことになって、広範囲な海岸の変化や予期しない災害を引き起こすことにもなるし、また前者の場合にはその過程を助長する可能性もあろう。海岸侵食や港湾埋没などは、まさにこうした自然の平衡状態を人為的に乱したことの因果にほかならず、厳しい自然条件下にあるわが国においては、海岸の保全の問題が、その開発利用と関連してきわめて重要であることは、いまさらいうまでもないことかも知れない。しかしながら、国土が狭小で海岸線が長く、平野部が海岸に集中しているわが国においては、海岸の高度利用は避けられず、特に2000海里時代を迎え、沿岸海域の重要性が認識されつつある今日、厳しい自然条件と闘いながら、今後もその開発利用は進められるであろう。このことは、それがより苛酷な波浪条件にさらされるだけでなく、自然の平衡状態を乱す危険性もまた大きくなっているというべきであろう。

現在わが国では、河川からの流送土砂の減少に伴う海岸侵食が大きな問題となってきているが、その抜本的な防止対策はいまだ確立されていないと言ってよい。このように河川流域をはじめ沿岸海域の開発利用は、必然的に自然の平衡状態のじょう乱を余儀なくされ、その影響は最後に海岸において集積される。この観点から、海岸工学に課された使命は大きく、かつ広範であり、とくに浅海における波浪特性をはじめ、それに伴う海浜過程の究明は緊急を要する最重要課題の一つとなっていることは周知のとおりである。すなわち、波浪特性の究明は、沿岸海域の開発のためでなく、それ以上に、厳しい自然環境に置かれているわが国の海岸災害の防止軽減のためにきわめて重要となってきたのである。

ところで、浅海における波浪の特性に対しては、その力学的特性のみならず、統計的特性も併せて究明する必要があるが、前者において重要なことは、波形の尖鋭化に伴う碎波や質量輸送などの波の非線形性に依存した現象であり、また後者に対しては、波の不規則性と方向スペクトルの特性が問題となり、これらの特性は波浪の数値予知法の確立や海岸・海洋構造物の設計に適用されるようになってきた。この波形の尖鋭化の問題は、水深変化に伴う波高変化をはじめ、浅海における波浪予知などに大きく影響し、また碎波現象は、海浜過程の主役を演ずるとともに、構造物に作用する衝撃波力や越波現象においてとくに重要となる。同時に、波の質量輸送は波形の尖鋭化と関連し、沿岸流や漂砂などの沿岸海域における輸送現象と密接な関係にある。このように、前述した数例からでもわかるように、浅海における波の非線形性の



寄与を究明することは、海岸工学上必須の課題の一つである。したがって、以下では、海岸工学の立場からこれまでなされてきた有限振幅波に関する理論的研究の概略を述べ、その問題点を指摘する。

有限振幅波に関する最初の研究は、1802年にGerstner<sup>2)</sup>によって発表されたいわゆるトロコイド波理論である。この理論は、Lagrangeの流体力学の基礎方程式の厳密解の一つになっており、その意味で今日においてもなお高く評価されているが、その解としてのトロコイド波は渦度を有しているため若干の問題を残して、その後の発展は見られなかった。1844年にRussell<sup>2)</sup>によって一様水深場における定形波とくに孤立波の存在に関する詳細な観察結果が発表され、またBoussinesqおよびRayleigh<sup>2)</sup>によって、独立にその理論が試みられて以来、定形波の存在を理論的に裏付けるべく、波の理論的研究が精力的に進められることになった。1847年Stokes<sup>3)</sup>によって現在Stokes波と呼ばれている有限振幅波のポテンシャル理論が誘導され、今日の波動論の基礎が確立された。さらに、同時代の1895年には、Korteweg-de Vries<sup>4)</sup>によって、クノイド波と呼ばれる極浅水域での新しい有限振幅波の理論が発表されたが、当時この理論はあまり注目されなかったようである。しかし、最近になって、この理論はプラズマ力学などにおいて注目され、また海岸工学の分野でも改めて認識されるようになってきた。こうして、現在用いられている非回転流体場での有限振幅波の理論の基礎がすでに19世紀において完成され、その後Rayleigh<sup>5)</sup>やLamb<sup>2)</sup>によって波の理論に関する研究が進められ、一時に開花した形となった。しかしながら、今世紀に入ってから、ただわずかにLevi-Civita<sup>6)</sup>やStruik<sup>7)</sup>によって有限振幅の定形波の存在が証明されたに過ぎなかったけれども、1954年新しく海岸工学の分野が生れてから、再びその理論的研究が活発に進められるようになった。このLevi-Civitaの理論は、写像による波理論としての数学的な定式化として高く評価されていることは周知のとおりである。その後、波の特性に及ぼす非線形性のより高次の検討や存在可能な限界の極限波高の追求に関心が向けられ、より高次近似解の誘導が試みられてきたのである。すなわちStokes波については、その後Skjelbreia<sup>8)</sup>およびSkjelbreia-Hendrickson<sup>9)</sup>によってそれぞれ第3次および第5次近似解が誘導され、またBretschneider<sup>10)</sup>によっても第5次近似解が独立に求められた。また、速度ポテンシャルの代わりに流れ関数を用いて自由表面における運動学的条件を必然的に満足させ、高次近似解を誘導する手法がDean<sup>11)</sup>により流れ関数法(Stream function theory)として展開されてきたが、その後Schwindら<sup>12)</sup>およびMonkmeyer<sup>13)</sup>によっても試みられている。また、田中<sup>14)</sup>は定常化の方法の波理論への適用に疑義をもち、調和関数からなる級数で解を仮定して、Stokes波理論を展開し、従来の理論と若干異なる解を得た。極限波高の究明に関しては、種々の研究がなされてきたが、なかでもLevi-Civitaの方法で級数解を求めた山田<sup>15)</sup>の研究は有名である。

一方、クノイド波については、その後Keulegan-Patterson<sup>16)</sup>によっても第1次近似解の誘導が試みられた。しかし、Friedrichs<sup>17)</sup>によって提案されたいわゆるsystematic methodを用いれば、さらに高次解を求められ、この方法でKeller<sup>18)</sup>およびLaitone<sup>19)</sup>はそれぞれ第1次および第2次近似解を導いた。ついで、Chappellear<sup>20)</sup>によって第3次近似解の誘導が試みられたが、計算に誤まりのあることが佐伯ら<sup>21)</sup>によって指摘され追計算がなされた。さらに、孤立波の場合については、

複素ポテンシャルを定義して境界条件を簡略化し、Byatt - Smith<sup>22)</sup>およびFenton<sup>23)</sup>がそれぞれ厳密解および第9次近似解を導いた。

以上のように、非線形の流体力学の基礎方程式からその高次近似解として有限振幅波理論が展開されてきたが、これらの理論はいずれも級数解であるために、その収束性が一般にUrsell parameterに依存し、その適用領域が限定されてくることになる<sup>24)</sup>。こうした問題は、厳密解を誘導することによって基本的には解決されるが、これまで孤立波に関してのみその厳密解がByatt - Smith<sup>22)</sup>によって求められたに過ぎず、また近似解の一樣収束性の証明は、Stokes波に対してLevi - Civita<sup>6)</sup>によってなされているに過ぎない。したがって、近似解で表される有限振幅波理論の適用性については、その収束性を検討するとともに、適切な実験結果と比較して、理論の適用性を究明する必要がある。ところで、前述したほとんどすべての有限振幅波理論について言えることであるが、その解の誘導においては波速を決定するための付加的条件を必要とする。これは、すでにStokes自身<sup>3)</sup>によって指摘されたが、その後の理論はStokesの波速の第1および第2定義と呼ばれる物理的付加条件のいずれかを用いて解を確定しているのである。その後もこの問題については、前述のKorteweg - de Vries<sup>4)</sup>やKeuleganら<sup>16)</sup>らによって、様々な取扱いがなされてきた。表-1.1<sup>25)</sup>に示すように、Keuleganら<sup>16)</sup>の理論を除いたいずれの有限振幅波理論においても、波速の第1定義あるいは第2定義のいずれかを用いて解の決定が行われており、その根本的解決がなされず、しかもその選択の根拠があい味なまま現在に至っている。なお、前述したLevi - Civita<sup>6)</sup>およびStruik<sup>7)</sup>らの写像による方法は第1定義の適用に対応している。このように、有限振幅波理論における波速の任意性の問題が現在まで未解決になっていたのは、それが単に理論上の問題として取扱われ、海岸工学的立場からの適用性の検討が十分でなかったことに一つの原因があると考えられる。しかしながら、前述した田中の疑義のほか、最近になってLe Méhauté<sup>26)</sup>および土屋ら<sup>27)</sup>によってこの問題が海岸工学的見

表-1.1 波速の定義による有限振幅波理論の分類

波速の定義 波動理論	第 1 定 義	第 2 定 義
Stokes 波	Stokes(2nd approx) Skjelbreia(3rd approx) 田 中 (3rd approx) Skjelbreia-Hendrickson(5th approx) Bretschneider(5th approx)	土屋・山口(4th approx)
クノイド波		Korteweg-de Vries(1st approx) Laitone(2nd approx) 土屋・山口(3rd approx)
流れ関数法	Dean	Schwind-Reid, Monkmeyer

地から取り上げられてきた。特に、土屋らは、波速の定義に関するこの問題を詳細に再検討し、まず理論面では第2定義を用いて Stokes 波理論の第4次近似解を、またクノイド波理論の第3次近似解をそれぞれ計算し、従来の理論と比較してそれらの波の特性を明らかにした。ついで、波浪水槽による詳細な実験結果との比較では、従来一般に用いられてきた波速の第1定義よりも、むしろ第2定義を用いるべきことが明らかにされ、またこの問題に対する根本的な理論的検討の必要性が強調された。そして、これらの研究によって、波速の定義の問題が、単に理論上の問題のみでなく、波速、水粒子速度および質量輸送速度などに大きく影響を及ぼすので、この問題の解決は、浅海における有限振幅波の特性とそれに伴う質量輸送などの水理現象の究明には必須であることが理解されるようになった。

このような観点から、本研究では、浅海における波の力学的特性の究明、特に波の非線形性とそれに伴う質量輸送の特性を究明するために、いわゆる通減せつ動法を適用して有限振幅波理論を試み、またそれを一様流の場に拡張し、ついでこの有限振幅波理論の応用例として、水深および流速変化によって生じる波の変形特性をエネルギーフラックス法で究明する。

以下では、本研究における各章の研究方法与内容の概略を述べる。まず、第2章クノイド波理論に関する研究では、いわゆる通減せつ動法を用いて、Stokes の波速の定義を直接用いない新しい一つのクノイド波理論を展開して、その第3次近似解まで誘導し、有限振幅波の特性を定式化して従来の理論と比較するとともに、定形進行波を対象とした新しい波浪水槽を用いた詳細な実験を行い、波形、波速および質量輸送速度に関してその理論の適用性を明らかにする。

第3章擬 Stokes 波理論に関する研究においては、第2章において用いた通減せつ動法の若干の一般化を行って、波の分散性が非線形性に対して卓越する場合の有限振幅波理論を展開し、クノイド波理論の適用範囲よりも沖側で適用できる有限振幅波理論として、擬 Stokes 波理論を提案し、その第4次近似解まで誘導する。そして、この有限振幅波の特性をクノイド波理論および Stokes 波理論と詳細に比較して、その適用性を考察する。

第4章一様流を伴う有限振幅波理論に関する研究においては、流れを伴う場合の波の非線形性および波に及ぼす流れの影響を明らかにするため、流れを一様流と仮定し、第2章および第3章で示した手法を用いて、一様流を伴うクノイド波理論および擬 Stokes 波理論を展開し、有限振幅波の特性に及ぼすこれらの影響を明らかにするとともに、波のエネルギーなどの保存量について同様に考察する。

ついで、第5章浅海における波の変形に関する研究においては、第2章、第3章および第4章で展開した有限振幅波理論の一つの応用として、水深および流速の変化による波の一次元的変形をエネルギーフラックス法によって解析し、その変形特性を従来の理論との比較において考察する。

最後に、第6章結論においては、本論文で得られた主要な研究の成果を要約する。

## 参 考 文 献

- 1) 石原藤次郎：海岸工学の現況，海岸工学研究発表会論文集，1954，pp. 1-7.
- 2) Lamb, H. *Hydrodynamics*，6版，1932.
- 3) Stokes, G.G.: On the Theory of Oscillatory Waves, Trans. Cambridge, Phil.



- Soc. , Vol. 8, 1847, pp 197 - 229.
- 4) Korteweg, D. J. and G. de Vries : On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Canal and on a New Type of Long Stationary Waves, Phil. Mag., 5 (39), 1895, pp. 422 - 443.
  - 5) Rayleigh, L.: Hydrodynamical Notes, Phil. Mag., Series 6, Vol. 21, 1911.
  - 6) Levi-Civita, T.: Determination Rigoureuse des Ondes Permanentes d'Amplitude Finie, Mathematische Annalen, Vol. 93, 1925, p. 264.
  - 7) Struik, D. J.: Determination Rigoureuse des Ondes Irrotationnelles Periodiques Dans un Canal a Profondeur Finie, Mathematische Annalen, Vol. 95, 1926, p. 595.
  - 8) Skjelbreia, L.: Gravity Waves, Stokes' Third Order Approximation, Tables of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959, pp. 1 - 337.
  - 9) Skjelbreia, L. and J. A. Hendrickson: Fifth Order Gravity Wave Theory, Proc. 7th Conf. on Coastal Engg., 1960, pp. 184 - 197.
  - 10) Bretschneider, C. L.: A Theory for Waves of Finite Height, Proc. 7th Conf. on Coastal Engg., 1960, pp. 146 - 183.
  - 11) Dean, R. G.: Stream Function Wave Theory, Validity and Application, Proc. A. S. C. E. Coastal Engg. Conf., Santa Barbara, 1965, pp. 269 - 300.
  - 12) Schwind, J. J. and R. O. Reid: Characteristics of Gravity Waves of Permanent Form, Jour. Geophys. Res., Vol. 77, 1972, pp. 420 - 433.
  - 13) Monkeyer, P. L.: A Higher Order Theory for Symmetrical Gravity Waves, Proc. 12th Conf. on Coastal Engg., 1970, pp. 543 - 559.
  - 14) 田中清: 海の波の解析概説, 第2回海岸工学講義講演集, 1955, pp. 17 - 32.
  - 15) Yamada, H.: Highest Waves of Permanent Type on the Surface of Deep Water, Rep. Res. Inst. Applied Mech., Vol. 5, No 18, 1956, pp. 37 - 52.
  - 16) Keulegan, G. H. and G. W. Patterson: Mathematical Theory of Irrotational Translation Waves, National Bureau of Standards, Report 1272, 1940, pp. 47 - 101.
  - 17) Friedrichs, K. O.: On the Derivation of the Shallow Water Theory, Commun. Pure and Appl. Math., Vol. 1, 1948, pp. 81 - 85.
  - 18) Keller, J. B.: The Solitary and Periodic Waves in Shallow Water, Commun. Pure Appl. Math., Vol. 1, 1948, pp. 323 - 339.
  - 19) Laitone, E. V.: The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 9, 1960, pp. 430 - 440.
  - 20) Chapplear, J. E.: Shallow Water Waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 67(12), 1962, pp. 4693 - 4704.

- 21) 佐伯 浩・泉冽：有限振幅浅水波の高次近似理論について，第16回海岸工学講演会講演集，1969，pp.1-6.
- 22) Byatt - Smith, J. G. B. : An Exact Integral Equation for Steady Surface Waves, Proc. Roy. Soc., A, 315, 1970, pp. 405 - 418.
- 23) Fenton, J. : A Ninth - Order Solution for the Solitary Waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 53, 1972, pp. 257 - 271.
- 24) Ursell, F. : The Long Wave Paradox in the Theory of Gravity Waves, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 49, 1953, pp. 685 - 694.
- 25) 山口正隆：柱体に作用する波力と重複波の波圧に関する基礎的研究，京都大学学位論文，1974.
- 26) Le Méhauté, B., D. Divoky and A. Lin : Shallow Water Waves, A Comparison of Theories and Experiments, Proc. 11th Conf. on Coastal Engg., 1968, pp. 87 - 101.
- 27) Tsuchiya, Y. and M. Yamaguchi : Some Consideration on Water Particle Velocities of Amplitude Wave Theories, Coastal Engg. in Japan, Vol. 15, 1972, pp. 43 - 57.

## 第2章 クノイド波理論に関する研究

### 第1節 概 説

緒論において述べたように、沿岸海域における波浪の力学的特性や沿岸流などの水理現象を解明する場合には、適切な仮定のもとに展開され、その適用性が明らかにされた有限振幅波理論が必要である。しかし、これまでのほとんどの有限振幅波理論は後述するような波速の任意性の問題を含んでいるため、沿岸海域での水理現象、特に波による輸送現象への有限振幅波理論の適用においては、質量輸送現象と関連した基本的な問題が生じている<sup>1)</sup>

Stokes<sup>2)</sup> は、1847年有限振幅の非回転な波の最初の取扱いとしてのいわゆる Stokes 波理論の誘導において、波速と絶対値が等しく逆向きの一様流を加えて、波動の場の定常化を行ったが、波速自体が未知量であるため、付加した一様流の流速と波動に伴う水粒子速度を区別して波速を定義するために何らかの付加条件が必要となることを強調し、いわゆる Stokes の波速の第1および第2定義と呼ばれる2つの物理的な波速の定義を提案した。ついで、このうち第1定義を用いて波速を定めた有限振幅波理論を展開した。しかし、この場合におけるその選択について Stokes 自身は、波速の第1定義については *most convenient method* また第2定義については *most natural method* と述べているだけで、いずれの定義を用いるべきかについて明確な考え方を示さなかった。それ以後発表されてきたほとんどの波動理論では、表1.1に示したように、各研究者によっていずれかの波速の定義が用いられてきた。これらの定義のうち、第1定義では流体中の各点における水平方向の水粒子速度の時間平均がゼロとなるときの波形の伝わる速度として、また第2定義では水平軸に垂直でかつ非常に離れた点にある2つの断面間に含まれる流体の平均の水平方向の速度がゼロとなるときの波形の伝わる速度として波速が定義され、これらの波速の定義によって、必然的に水粒子の運動が拘束されることになる。このことはすでに述べたように、波速の任意性の問題は単に波速のみでなく、水粒子速度などの波の特性に大きく影響する<sup>3)</sup>。しかし、当時においては、この波速の任意性の問題はあまり重要視されず、1895年に Korteweg-de Vries<sup>4)</sup> によって提案されたクノイド波理論においても、第2定義を用いて波速の決定が行われ、波速の任意性の根本的な解決は全く試みられてなかった。その後、Skjelbreia ら<sup>5)</sup> は、Stokes の用いた定常化の方法とは異なり、速度ポテンシャルおよび水面変動の2つの未知関数に対して座標変換により、基礎方程式の定常化を行った。しかし、この場合にも、速度ポテンシャルおよび水粒子速度の特解として仮定される一様流成分の表示にあたり、前述の波速の定義と全く同義の付加条件が用いられている。また、Dean<sup>6)</sup> による流れ関数法においても、未知量である波の質量輸送による流量が境界条件に関係し、特解として仮定される一様流成分を表示するために、やはりなんらかの付加条件を必要としている。この流れ関数法の場合、一般には境界条件の簡略化から、第2定義に相当する条件が用いられているが、Dean は第1定義に相当する条件を用いて、特解として仮定された一様流成分を消去して、境界条件を満足させている。これに対し、Schwind ら<sup>7)</sup> および

Monkmeyer<sup>8)</sup>の理論では、第2定義に相当する条件が用いられている。このように、Skjelbreiaらによる方法あるいは流れ関数法などはそれらの計算の手法こそ異なっているが、いずれもStokesの波速の定義と全く同義の付加条件を用いて解の誘導を行っていることになる。なお、1955年田中<sup>9)</sup>は、質量輸送を伴う有限振幅波理論において前述したような動座標による定常化を行うことに疑義を持ち、一つの計算方法を示して、水面変動量に対して新たに付加項を加えた計算を行い、従来のStokes波理論と異なる表示を得ている。しかし、その波の質量輸送についての考察は行っていない。

一方、1872年に発表されたBoussinesqの理論<sup>10)</sup>では、水面変動および速度ポテンシャルに関する基礎方程式を水面変動に関する非線形方程式に近似的に変換し、得られた方程式を定形波の仮定によって解くとともに、Stokesの波速の定義を用いることなく、波速の決定を行っている。このように、この手法は、波速の任意性の問題がこの近似の範囲でいちおう解決されている点で注目すべきものであるが、近似の高次化の試みは行われなかった。しかしながら、この手法は、波速の定義という観点からすれば、流体運動の基礎方程式を水面変動に関する方程式に変換し、それを定形波の仮定のみによって解こうとしている点において、これまでの理論のような基礎方程式の単なる定常化による取扱いと相違して、1つの有効な手法として評価してもよいと思われる。

以上のことを考えると、波による質量輸送現象に着目した浅海における有限振幅波理論の展開においては、波動に伴う流体内部に対して付加的条件による拘束をできるだけ与えないような取扱いをする必要があると言える。

従来、有限振幅波理論の適用性に関しては、波形、波速および水粒子速度などに関する各種の実験的研究が行われてきた。すなわち、Le Méhauté<sup>11)</sup>をはじめ岩垣ら<sup>12), 13)</sup>あるいは合田ら<sup>14)</sup>によって、各種の波浪水槽を用いて詳細な理論の適用性に関する実験的研究が実施されてきたけれども、これらはいずれも次の点に問題があるように思われる。有限振幅波には多かれ少なかれ質量輸送に伴う輸送現象が存在するので、定形波としての進行波を対象とする限り、その条件を完全に満足させた実験を試みる必要がある。すなわち、通常の進行波としての有限振幅波理論では定形波を仮定していることから、造波機によって起される波は空間的に一様および時間的に定常でなければならないし、さらに水粒子の運動に対する拘束がなく、波形と同様に質量輸送についても空間的一様性および時間的定常性が確保されなければならない。これに対し、これらの実験では、いずれも波形の一様性および定常性についてはかなり詳細な注意が払われてきたけれども、両端部を閉じた波浪水槽を用いているので、質量輸送に伴う輸送現象の一様性および定常性についてなんらの注意もなされていない。このために、水槽内にもどりの流れのような二次流が発生することになって、これが質量輸送速度のみならず水粒子速度や波速などにも影響することが考えられる。そして、その影響はたとえ従来のように、造波開始後の数波の初期波を除いた比較的定常状態になった場合を対象としても、同様な波の質量輸送に伴う二次流の発生が考えられる。したがって、有限振幅波理論の適用性に関する研究においては、前述したように定形波としての進行波の仮定を十分に満足させた実験を改めて実施する必要があると言えよう。

以上、従来の有限振幅波に関する理論的および実験的研究の問題点について考察したが、そのうち前者の理論展開においては、最近、数値物理学の方面で発展してきたいわゆる逐減せつ動法 (reductive perturbation method) を適用することによって、一つのクノイド波理論を試みることができる。この

通減せつ動法による手法は、Korteweg-de Vries 方程式の近代化を行った Gardner-Morikawa<sup>15)</sup>の手法 (Gardner-Morikawa 変換<sup>16)</sup>) を谷内ら<sup>17), 18), 19)</sup> が発展させたもので、基礎となる物理現象を表す方程式を唯一の未知数で表された方程式 (single tractable equation) に変換する手法である。著者はこの手法を用いて、水面変動に関する高次の非線形方程式の誘導を行い、その定形波としての有限振幅波の定常解を求めたクノイド波理論を第3次近似解まで展開する。そして、クノイド波の特性とくに波形、波速および水粒子速度のみならず、波のエネルギー、エネルギーフラックスと極限波高についての数学的表示を示す。したがって、この理論では、Stokes の波速の定義のような物理的付加条件をそのまま用いておらず、波動の場での水粒子の運動に対してできるだけ拘束を与えないよう注意しているので、波による質量輸送も Euler および Lagrange の両座標において一義的に決定されることになり、沿岸海域における輸送現象の解明に有効な一つの有限振幅波理論を提案することになる。

つぎに、このクノイド波理論の適用性に関する実験的研究においては、前述した定形波としての進行波の満足すべき二つの条件を同時に満足させた新しい波浪水槽を試作し、有限振幅波の波速および質量輸送速度に関する実験を行って、理論結果と詳細に比較検討し、このクノイド波理論の適用性を確かめる。

## 第2節 新しいクノイド波理論

### (1) 波動方程式の誘導

#### a) 基礎方程式

速度ポテンシャル  $\phi$  の存在する波動運動を考え、かつ座標および記号を図-2.1 に示すようにとることにすれば、その基礎方程式は、次式で表される。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

また、自由表面での動力学および運動学的境界条件はそれぞれ式 (2.2) および (2.3) で表される。

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g(z - h) \Big|_{z=h+z'} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

$$z = h + z' = 0 \quad \dots\dots (2.2)$$

$$z'_t + z'_x \phi_x - \phi_z \Big|_{z=h+z'} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

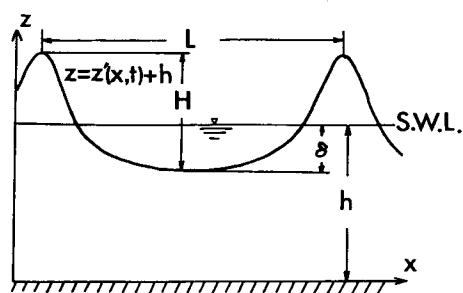


図-2.1 座標系および記号の説明図

なお、通常式 (2.2) の右辺に現われる Bernoulli 定数は、右辺第1項  $\phi_t$  に含まれている。さらに、水底での運動学的境界条件は、次式で表される。

$$\phi_z \Big|_{z=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

ここに、 $g$ ：重力の加速度， $z'$ ：平均水深からの水位変動，および $h$ ：平均水深である。任意の外乱によって生ずる波動運動に対して独立な量は，水深 $h$ であるから，これを基準長として次の無次元量を定義する。

$$\phi^* = \frac{\phi}{h\sqrt{gh}}, \quad x^* = \frac{x}{h}, \quad z^* = \frac{z}{h}, \quad t^* = t\sqrt{\frac{g}{h}}, \quad z'^* = \frac{z'}{h}, \quad p^* = \frac{p}{\rho gh} \quad (2.5)$$

式(2.5)を用いて式(2.1)，(2.2)，(2.3)および(2.4)を書き換えると，次式が得られる。

$$\nabla^2 \phi^* = 0 \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

$$\phi_{t^*}^* + \frac{1}{2}(\phi_{x^*}^{*2} + \phi_{z^*}^{*2}) + z'^* \Big|_{z^*=1+z'^*} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

$$z_{t^*}^* + z_{x^*}^* \phi_{x^*}^* - \phi_{z^*}^* \Big|_{z^*=1+z'^*} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

$$\phi_{z^*}^* \Big|_{z^*=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

#### b) 水面変動に関する方程式の誘導

前述した基礎方程式(2.6)，(2.7)，(2.8)および(2.9)を水面変動に関する方程式に変換するため，通減せつ動法(reductive perturbation)に従い，つぎのGardner-Morikawa変換

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x^* - t^*), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t^*, \quad \zeta = z^* \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

を用い，次式で表されるせつ動解を仮定する。

$$z^*(x^*, t^*) = \varepsilon\eta_1(\xi, \tau) + \varepsilon^2\eta_2(\xi, \tau) + \dots\dots\dots (2.11)$$

$$\phi^*(x^*, z^*, t^*) = \varepsilon^{1/2}\{\phi_1(\xi, \zeta, \tau) + \varepsilon\phi_2(\xi, \zeta, \tau) + \dots\dots\dots\} \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

ここに， $\varepsilon = (h/L)^2$ ，および $L$ は波長である。一方， $z^* = 1 + z'^*$ における $\phi^*(x^*, z^*, t^*)$ を $z^* = 1$ の周りにBoussinesq<sup>10)</sup>にならって，次のようにTaylor展開する。

$$\phi^*(x^*, 1+z'^*, t^*) = \phi^*(x^*, 1, t^*) + z'^* \phi_{z^*}^*(x^*, 1, t^*) + \dots\dots\dots (2.13)$$

かようにすれば，式(2.6)，(2.7)，(2.8)および(2.9)はそれぞれ式(2.14)，(2.15)，(2.16)および(2.17)のように展開される。

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{1/2}\phi_{1\zeta\zeta} + \varepsilon^{3/2}(\phi_{2\zeta\zeta} + \phi_{1\xi\xi}) + \varepsilon^{5/2}(\phi_{3\zeta\zeta} + \phi_{2\xi\xi}) + \varepsilon^{7/2}(\phi_{4\zeta\zeta} + \phi_{3\xi\xi}) \\ & + O(\varepsilon^{9/2}) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.14) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \varepsilon(\eta_1 - \phi_{1\xi}) + \varepsilon^2(-\phi_{2\xi} + \phi_{1\tau} + \frac{1}{2}\phi_{1\xi}^2 + \eta_2) + \varepsilon^3(-\eta_1\phi_{2\xi\xi} - \eta_2\phi_{1\xi\xi} - \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{1\xi\xi\xi} \\
& - \phi_{3\xi} + \phi_{2\tau} + \eta_1\phi_{1\tau\xi} + \phi_{1\xi}\phi_{2\xi} + \eta_1\phi_{1\xi}\phi_{1\xi\xi} + \frac{1}{2}\phi_{2\xi}^2 + \eta_1\phi_{2\xi}\phi_{1\xi\xi} + \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{1\xi\xi}^2 + \eta_3) \\
& + \varepsilon^4(-\phi_{4\xi} - \eta_1\phi_{3\xi\xi} - \eta_2\phi_{2\xi\xi} - \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{2\xi\xi\xi} - \eta_3\phi_{1\xi\xi} - \eta_1\eta_2\phi_{1\xi\xi\xi} - \frac{1}{6}\eta_1^3\phi_{1\xi\xi\xi\xi} \\
& + \phi_{3\tau} + \eta_1\phi_{2\tau\xi} + \eta_2\phi_{1\tau\xi} + \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{1\tau\xi\xi} + \phi_{2\xi}\phi_{3\xi} + \eta_1\phi_{2\xi}\phi_{2\xi\xi} + \eta_2\phi_{2\xi}\phi_{1\xi\xi} \\
& + \eta_1\phi_{1\xi\xi}\phi_{3\xi} + \eta_1^2\phi_{1\xi\xi}\phi_{2\xi\xi} + \eta_1\eta_2\phi_{1\xi\xi}^2 + \frac{1}{2}\eta_1^3\phi_{1\xi\xi}\phi_{1\xi\xi\xi} + \phi_{1\xi}\phi_{3\xi} + \eta_1\phi_{1\xi}\phi_{2\xi\xi} \\
& + \frac{1}{2}\phi_{2\xi}^2 + \eta_2\phi_{1\xi}\phi_{1\xi\xi} + \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{1\xi\xi}^2 + \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{1\xi}\phi_{1\xi\xi\xi} + \eta_4) + O(\varepsilon^5)|_{\zeta=1} = 0 \dots\dots\dots (2.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{1/2}\phi_{1\zeta} + \varepsilon^{3/2}(-\eta_{1\xi} - \phi_{2\zeta} - \eta_1\phi_{1\zeta\xi}) + \varepsilon^{5/2}(-\eta_{2\xi} + \eta_{1\tau} + \eta_{1\xi}\phi_{1\xi} - \phi_{3\zeta} - \eta_1\phi_{2\zeta\xi} \\
& - \eta_2\phi_{1\zeta\xi} - \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{1\zeta\xi\xi}) + \varepsilon^{7/2}(-\eta_{3\xi} + \eta_{2\tau} + \eta_{2\xi}\phi_{1\xi} + \eta_{1\xi}\phi_{2\xi} + \eta_1\eta_{1\xi}\phi_{1\xi\xi}) \\
& - \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{2\zeta\xi\xi} - \eta_2\phi_{2\zeta\xi} - \frac{1}{6}\eta_1^3\phi_{1\zeta\xi\xi\xi} - \eta_3\phi_{1\zeta\xi} - \eta_1\eta_2\phi_{1\zeta\xi\xi} - \eta_1\phi_{3\zeta\xi} - \phi_{4\zeta} \\
& + \varepsilon^{9/2}(-\eta_{4\xi} + \eta_{3\tau} + \eta_{3\xi}\phi_{1\xi} + \eta_1\eta_{2\xi}\phi_{1\xi\xi} + \eta_{2\xi}\phi_{2\xi} + \eta_{1\xi}\phi_{3\xi} + \eta_1\eta_{1\xi}\phi_{2\xi\xi} \\
& + \eta_2\eta_{1\xi}\phi_{1\xi\xi} + \frac{1}{2}\eta_1^2\eta_{1\xi}\phi_{1\xi\xi\xi} - \phi_{5\zeta} - \eta_1\phi_{4\zeta\xi} - \eta_2\phi_{3\zeta\xi} - \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{3\zeta\xi\xi} - \eta_3\phi_{2\zeta\xi} \\
& - \eta_1\eta_2\phi_{2\zeta\xi\xi} - \frac{1}{6}\eta_1^3\phi_{2\zeta\xi\xi\xi} - \eta_4\phi_{1\zeta\xi} - \eta_1\eta_3\phi_{1\zeta\xi\xi} - \frac{1}{2}\eta_2^2\phi_{1\zeta\xi\xi} - \frac{1}{24}\eta_1^2\phi_{1\zeta\xi\xi\xi\xi}) \\
& + O(\varepsilon^{11/2})|_{\zeta=1} = 0 \dots\dots\dots (2.16)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon^{1/2}\phi_{1\zeta} + \varepsilon^{3/2}\phi_{2\zeta} + \varepsilon^{5/2}\phi_{3\zeta} + O(\varepsilon^{7/2})|_{\zeta=0} = 0 \dots\dots\dots (2.17)$$

これらの諸式より，まず  $\varepsilon$  のオーダーに対しては，次式が得られる。

$$\phi_1 = \phi_1(\xi, \tau) \dots\dots\dots (2.18)$$

また， $\varepsilon^2$  のオーダーに対しては，次式が誘導される。

$$\left. \begin{aligned} \phi_2 &= -\frac{1}{2}\zeta^2\phi_{1\xi\xi} + \varphi_1(\xi, \tau) \\ \eta_1 &= \phi_{1\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.19)$$

ここに、 $\varphi_1(\xi, \tau)$  は  $\zeta$  に関する積分定数である。同様に、 $\epsilon^3$  のオーダーに対しては、

$$\left. \begin{aligned} \phi_3 &= \frac{1}{4!}\zeta^4\phi_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2}\zeta^2\phi_{1\xi\xi} + \varphi_2(\xi, \tau) \\ \phi_{1\xi} &= \eta_2 + \phi_{1\tau} + \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}\eta_{1\xi\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.20)$$

$$\eta_{1\tau} + \frac{3}{2}\eta_1\eta_{1\xi} + \frac{1}{6}\eta_{1\xi\xi\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

ここに、 $\varphi_2(\xi, \tau)$  は  $\varphi_1(\xi, \tau)$  と同じく  $\zeta$  に関する積分定数である。周知のように、式 (2.21) は、いわゆる Korteweg-de Vries の方程式として知られているものである。さらに、同様な計算を進めて、 $\epsilon^4$  のオーダーに対しては、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_4 &= -\frac{1}{6!}\zeta^6\phi_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{4!}\zeta^4\phi_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2!}\zeta^2\phi_{2\xi\xi} + \varphi_3(\xi, \tau) \\ \phi_{2\xi} &= \eta_3 + \frac{1}{2}\eta_1\eta_{1\xi\xi} - \frac{1}{24}\eta_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2}\eta_{1\xi\tau} + \frac{1}{2}\eta_{1\xi}^2 + \frac{1}{2}\phi_{1\xi\xi\xi} + \eta_1\phi_{1\xi} + \phi_{1\tau} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.22)$$

$$\begin{aligned} \eta_{2\tau} + \frac{3}{2}(\eta_1\eta_2)_\xi + \frac{1}{6}\eta_{2\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}\eta_{1\xi}\eta_{1\xi\xi} + \frac{2}{3}\eta_1\eta_{1\xi\xi\xi} + \frac{1}{6}\eta_{1\xi\xi\tau} + \frac{3}{2}\eta_1^2\eta_{1\xi} \\ + \frac{5}{2}\eta_1\eta_{1\tau} + \eta_{1\xi}\phi_{1\tau} + \frac{1}{2}\phi_{1\tau\tau} + \frac{1}{15}\eta_{1\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.23) \end{aligned}$$

ここに、 $\varphi_3(\xi, \tau)$  は  $\zeta$  に関する積分定数である。 $\epsilon^5$  のオーダーに関しては、

$$\left. \begin{aligned} \phi_5 &= \frac{1}{8!}\zeta^8\phi_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{6!}\zeta^6\phi_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{4!}\zeta^4\phi_{2\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2}\zeta^2\phi_{3\xi\xi} + \varphi_4(\xi, \tau) \\ \phi_{3\xi} &= \frac{1}{720}\eta_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{24}\phi_{1\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{2}\phi_{2\xi\xi} - \frac{1}{6}\eta_1\eta_{1\xi\xi\xi} + \eta_2\eta_{1\xi\xi} + \frac{1}{2}\eta_1^2\eta_{1\xi\xi} \\ &\quad + \frac{1}{24}\eta_{1\xi\xi\xi\tau} - \frac{1}{2}\phi_{1\xi\xi\tau} + \phi_{2\tau} - \eta_1\eta_{1\xi\tau} - \frac{1}{6}\eta_{1\xi}\eta_{1\xi\xi\xi} + \eta_{1\xi}\phi_{1\xi\xi} + \eta_1\eta_{1\xi}^2 + \frac{1}{24}\eta_1\eta_{1\xi\xi\xi\xi} \\ &\quad + \eta_4 + \frac{1}{2}\eta_1\phi_{1\xi\xi\xi} - \eta_1^2\eta_{1\xi\xi} + \frac{1}{8}\eta_{1\xi\xi}^2 + \frac{1}{2}\phi_{1\xi}^2 - \frac{1}{2}\eta_{1\xi\xi}\phi_{1\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.24)$$

$$\eta_{3\tau} + \frac{3}{2}(\eta_1\eta_3)_\xi + \frac{3}{2}\eta_2\eta_{2\xi} + \frac{1}{6}\eta_{3\xi\xi\xi} + \frac{1}{15}\eta_{2\xi\xi\xi\xi} + \frac{2}{3}\eta_2\eta_{1\xi\xi\xi} + \frac{2}{3}\eta_1\eta_{2\xi\xi\xi} + \frac{1}{6}\eta_{2\xi\xi\tau}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2}\eta_1\eta_{2\tau} + \frac{3}{2}\eta_2\eta_{1\tau} + \frac{3}{2}\eta_{1\xi}\eta_{2\xi\xi} + \frac{3}{2}\eta_{2\xi}\eta_{1\xi\xi} + 3\eta_1\eta_2\eta_{1\xi} + \frac{3}{2}\eta_1^2\eta_{2\xi} + \eta_{1\xi}\varphi_{1\tau} \\
& + \eta_{2\xi}\phi_{1\tau} + \frac{1}{2}\varphi_{1\tau\tau} + \frac{17}{630}\eta_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{15}\eta_{1\xi\xi\xi\xi\xi\tau} + 2\eta_{1\xi\xi}\eta_{1\xi\xi\xi} + \frac{4}{3}\eta_{1\xi}\eta_{1\xi\xi\xi\xi} \\
& + \frac{2}{5}\eta_1\eta_{1\xi\xi\xi\xi} + \frac{5}{2}\eta_{1\xi}^3 + \eta_{1\tau}\phi_{1\tau} + \frac{15}{2}\eta_1\eta_{1\xi}\eta_{1\xi\xi} + \frac{5}{4}\eta_1^2\eta_{1\xi\xi\xi} + \frac{5}{8}\eta_{1\xi\xi}\eta_{1\tau} \\
& + \frac{4}{3}\eta_{1\xi}\eta_{1\xi\tau} + \frac{5}{6}\eta_1\eta_{1\xi\xi\tau} + \frac{1}{6}\eta_{1\xi\xi}\phi_{1\tau} - \frac{1}{12}\eta_{1\xi\tau\tau} + 3\eta_1^2\eta_{1\tau} + \frac{3}{2}\eta_{1\phi_{1\tau\tau}} \\
& + \frac{9}{4}\eta_1^3\eta_{1\xi} + \frac{5}{2}\eta_1\eta_{1\xi}\phi_{1\tau} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.25)
\end{aligned}$$

ここに、 $\varphi_4(\xi, \tau)$  は  $\zeta$  に関する積分定数である。同様な手順を順次繰り返すことによって、前述した諸式は最終的に次のように表示される。

$$\begin{aligned}
\eta_\tau + \frac{3}{2}\eta\eta_\xi + \frac{1}{6}\eta_{\xi\xi\xi} &= -\varepsilon\left\{\frac{1}{15}\eta_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{6}\eta_{\xi\xi\tau} + \frac{3}{2}\eta_\xi\eta_{\xi\xi} + \frac{2}{3}\eta\eta_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}\eta^2\eta_\xi\right. \\
& + \frac{3}{2}\eta\eta_\tau + \eta_\xi Q_\tau + \frac{1}{2}Q_{\tau\tau}\} - \varepsilon^2\left\{\frac{17}{630}\eta_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{15}\eta_{\xi\xi\xi\xi\tau} + 2\eta_{\xi\xi}\eta_{\xi\xi\xi} + \frac{4}{3}\eta_\xi\eta_{\xi\xi\xi\xi}\right. \\
& + \frac{2}{5}\eta\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{5}{2}(\eta_\xi)^3 + \frac{15}{2}\eta\eta_\xi\eta_{\xi\xi} + \frac{5}{4}\eta^2\eta_{\xi\xi\xi} + \frac{5}{8}\eta_{\xi\xi}\eta_\tau + \frac{4}{3}\eta_\xi\eta_{\xi\tau} + \frac{5}{6}\eta\eta_{\xi\xi\tau} \\
& - \frac{1}{12}\eta_{\xi\tau\tau} + 3\eta^2\eta_\tau + \frac{9}{4}\eta^3\eta_\xi + \frac{1}{6}\eta_{\xi\xi\xi}Q_\tau + \eta_\tau Q_\tau + \frac{3}{2}\eta Q_{\tau\tau} + \frac{5}{2}\eta\eta_\xi Q_\tau\} \\
& + \dots\dots\dots (2.26)
\end{aligned}$$

$$Q_\xi - \eta = \varepsilon\{Q_\tau + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta_{\xi\xi}\} + \varepsilon^2\left\{\frac{3}{2}\eta\eta_{\xi\xi} + \frac{5}{24}\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \eta_\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^3 + \eta Q_\tau\right\} + \dots\dots (2.27)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
\eta &= \eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \varepsilon^2\eta_3 + \dots\dots, \quad z'/h = \varepsilon\eta \\
Q &= \phi_1 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \dots\dots, \quad \phi^* = \varepsilon^{1/2}(Q - \varepsilon\zeta^2 Q_{\xi\xi}/2 + \varepsilon^2\zeta^4 Q_{\xi\xi\xi\xi}/4 + \dots\dots)
\end{aligned} \right\} \dots\dots (2.28)$$

いうまでもなく、式 (2.26) において  $\varepsilon=0$  とすれば、いわゆる Korteweg-de Vries 方程式 (以後 K-dV 方程式と略記する) に一致する。さらに、式 (2.26) の右辺を  $\varepsilon F(\eta, Q_\tau)$  とすれば、次式のように表される。

$$\eta_\tau + \frac{3}{2}\eta\eta_\xi + \frac{1}{6}\eta_{\xi\xi\xi} - \varepsilon F(\eta, \mathcal{Q}) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

ここで、式(2.26)および(2.27)の解として、固有値  $c^*$  を含む次式の関係

$$\eta(\xi, \tau) = \eta(\sigma), \quad \mathcal{Q}(\xi, \tau) = \mathcal{Q}(\sigma), \quad \sigma = \xi - c^* \tau \quad \dots\dots\dots (2.30)$$

を満足する定形進行波を表す波動解を考えることにすれば、これら両式から  $\mathcal{Q}$  を消去することができ、次式が導かれる。

$$\begin{aligned} -c^* \eta_\sigma + \frac{3}{2}\eta\eta_\sigma + \frac{1}{6}\eta_{\sigma\sigma\sigma} = & -\varepsilon \left\{ \frac{3}{2}\eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} + \frac{2}{3}\eta\eta_{\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6}c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2}\eta^2 \eta_\sigma \right. \\ & - \frac{5}{2}c^* \eta\eta_\sigma + \frac{1}{2}c^{*2} \eta_\sigma + \frac{1}{15}\eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \} - \varepsilon^2 \{ 4c^{*2} \eta\eta_\sigma - 6c^* \eta^2 \eta_\sigma - \frac{7}{2}c^* \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} \\ & - \frac{1}{2}c^{*3} \eta_\sigma - c^* \eta\eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{6}c^{*2} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + 2\eta_{\sigma\sigma} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{4}{3}\eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{2}{5}\eta\eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \\ & + \frac{5}{2}\eta_\sigma^3 + \frac{15}{2}\eta\eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} + \frac{5}{4}\eta^2 \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{9}{4}\eta^3 \eta_\sigma - \frac{1}{15}c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{17}{630}\eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \} \\ & + O(\varepsilon^3) \quad \dots\dots\dots (2.31) \end{aligned}$$

これが、浅海での定形波の代表的なものとして従来考えられてきたクノイド波および孤立波に対する水面変動  $\eta$  のみで表された基礎方程式である。ところで、式(2.31)の最高階の微係数  $\eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma}$  に  $\varepsilon^2$  がかかっているが、その解を左辺のK-dV方程式の厳密解の周りに  $\varepsilon$  で級数展開する通常のせつ動法が適用できるためには、 $(17/630)\eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \sim (9/4)\eta^3 \eta_\sigma$  となるような比較的平滑な波であることが必要条件になると思われる。これは、Laitone のクノイド波理論においても、同様に指摘されることである。また、上式は  $\eta$  に関する方程式であるが、固有値  $c^*$  を含むため、式(2.28)に示した  $\eta$  に対するせつ動解だけでなく、次式に示す  $c^*$  に対するせつ動解

$$c^* = 1 + \varepsilon c_0 + \varepsilon^2 c_1 + \varepsilon^3 c_2 + \dots\dots\dots (2.32)$$

を同時に仮定し、 $\eta$  と同時に  $c^*$  も逐次求めて行く必要がある。

なお、この理論では、波動方程式だけでなく、水粒子速度や圧力に関しても水面変動  $\eta$  による表示を導くことができるので、まず水平および鉛直水粒速度について表示すれば、それぞれ次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} &= \frac{\phi_x}{\sqrt{gh}} \\ &= \varepsilon \eta + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1\right\}\eta_{\sigma\sigma} - c^* \eta \right] + \varepsilon^3 \left[ \frac{1}{24}\left\{\left(\frac{z}{h}\right)^4 - 6\left(\frac{z}{h}\right)^2 + 5\right\}\eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1\right\}c^* \eta_{\sigma\sigma} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 3\right\}\eta\eta_{\sigma\sigma} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2\right\}\eta_\sigma^2 - \frac{3}{2}c^* \eta^2 + \frac{1}{2}\eta^3 \right] \end{aligned}$$

$$+ c^{*2} \eta \rfloor + \dots$$

$$= \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \left[ \eta_2 + \frac{1}{2} \eta_1^2 - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{1\sigma\sigma} - c_0 \eta_1 \right] + \varepsilon^3 \left[ \eta_3 + \eta_1 \eta_2 - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{2\sigma\sigma} \right. \\ \left. - c_0 \eta_2 - c_1 \eta_1 + \frac{1}{24} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 5 \right\} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} c_0 \eta_{1\sigma\sigma} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} \eta_{1\sigma}^2 - \frac{3}{2} c_0 \eta_1^2 + \frac{1}{2} \eta_1^3 + c_0^2 \eta_1 \right] + \dots \quad (2.33)$$

$$\frac{w}{\sqrt{gh}} = \frac{\phi}{\sqrt{gh}}$$

$$= -\varepsilon^{3/2} \left( \frac{z}{h} \right) \eta_\sigma + \varepsilon^{5/2} \left( \frac{z}{h} \right) \left[ \frac{1}{6} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma} - \eta \eta_\sigma + c^* \eta_\sigma \right] \\ + \varepsilon^{7/2} \left( \frac{z}{h} \right) \left[ -\frac{1}{120} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 10 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 25 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 7 \right\} \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} + \frac{1}{6} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 9 \right\} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} \right. \\ \left. - \frac{3}{2} c^* \eta \eta_\sigma - \frac{3}{2} \eta_\sigma^2 \eta_\sigma - c^{*2} \eta_\sigma - \frac{1}{6} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma} \right] + \dots \\ = -\varepsilon^{3/2} \left( \frac{z}{h} \right) \eta_{1\sigma} + \varepsilon^{5/2} \left( \frac{z}{h} \right) \left[ -\eta_{2\sigma} + \frac{1}{6} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \eta_1 \eta_{1\sigma} + c_0 \eta_{1\sigma} \right] + \varepsilon^{7/2} \left( \frac{z}{h} \right) \left[ -\eta_{3\sigma} \right. \\ \left. - \eta_1 \eta_{2\sigma} - \eta_2 \eta_{1\sigma} + c_0 \eta_{2\sigma} + c_1 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{6} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} \eta_{2\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{120} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 10 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 5 \right\} \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 7 \right\} \eta_{1\sigma} \eta_{1\sigma\sigma} + \frac{1}{6} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 9 \right\} \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \frac{3}{2} c_0 \eta_1 \eta_{1\sigma} - \frac{3}{2} \eta_1^2 \eta_{1\sigma} - c_0^2 \eta_{1\sigma} \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} c_0 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} \right] + \dots \quad (2.34)$$

さらに、波動運動に伴う圧力は、Bernoulli の式を用いて次式のように表わされる。

$$\frac{p}{\rho gh} = 1 - \left( \frac{z}{h} \right) + \varepsilon \eta - \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{\sigma\sigma} \right] + \varepsilon^3 \left[ \frac{1}{24} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 5 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ \left. - \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_\sigma^2 + \eta \eta_{\sigma\sigma} \right] + \dots \\ = 1 - \left( \frac{z}{h} \right) + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \left[ \eta_2 - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{1\sigma\sigma} \right] + \varepsilon^3 \left[ \eta_3 - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{2\sigma\sigma} \right. \\ \left. + \frac{1}{24} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 5 \right\} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{1\sigma}^2 + \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} \right] + \dots \quad (2.35)$$

(2) クノイド波および孤立波に対するせつ動解

a) 第1次近似解

第1次近似解に対しては、式(2.31)から次式が得られる。

$$-c_0\eta_{1\sigma} + \frac{3}{2}\eta_1\eta_{1\sigma} + \frac{1}{6}\eta_{1\sigma\sigma\sigma} = 0 \quad (2.36)$$

周知のように、上式の解は周期解を仮定することによって次式で表される。

$$\eta_1 = \beta + (r - \beta)\text{cn}^2\vartheta \quad (2.37)$$

ここに、

$$\vartheta = \frac{\sigma}{\chi}, \quad \chi^2 = \frac{4}{3(r - \alpha)}, \quad k^2 = \frac{r - \beta}{r - \alpha} \quad (2.38)$$

であり、また $\alpha, \beta$ および $r$ ：いずれも積分定数で $r > \beta > \alpha$ ,  $\text{cn}$ ：Jacobi のだ円関数、および $k$ ：だ円関数の母数である。なお、波速を表す $c_0$ は、式(2.36)に式(2.37)の波動解を代入することによって、次式のように表される。

$$c_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + r) \quad (2.39)$$

したがって、積分定数 $\alpha, \beta$ および $r$ を決定すれば、波動解および波速は一義的に決定されることになるから、まず、次式に示す波形の連続条件

$$\int_0^{2K} \eta d\vartheta = \beta + (r - \beta)J_1 = 0, \quad J_1 = \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \quad (2.40)$$

および次式に示す波高 $H$ に関する条件

$$\frac{H}{h} = \varepsilon(\eta_{max} - \eta_{min}) = \varepsilon(r - \beta) \quad (2.41)$$

を用いて、 $\alpha, \beta$ および $r$ を $(H/h)$ および $k$ の関数として次式のように表す。

$$\varepsilon\alpha = -\frac{1}{k^2} \left( \frac{H}{h} \right) \left( \frac{E}{K} \right), \quad \varepsilon\beta = -\frac{1}{k^2} \left( \frac{H}{h} \right) \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right), \quad \varepsilon r = -\frac{1}{k^2} \left( \frac{H}{h} \right) \left( \frac{E}{K} - 1 \right) \quad (2.42)$$

ここに、 $K$ および $E$ ：それぞれ第1種および第2種完全だ円積分である。ここで、母数 $k$ が唯一の未知量として残っているから、これを次式で表される水面変動に対する周期性の条件

$$2K = \frac{1}{2k} \{ 3\varepsilon(r - \alpha) \}^{1/2} (1 + \varepsilon c_0) T \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (2.43)$$

によって決定すれば、第1次近似解が確定されることになる。

これより、第1次近似解での波形は、次式で表される。

$$\frac{z}{h} = \left( \frac{H}{h} \right) \{ \text{cn}^2\vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \} \quad (2.44)$$

ここに、



$$\vartheta = \left\{ \frac{3}{4k^2} \left( \frac{H}{h} \right) \right\}^{1/2} \left( \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \dots\dots\dots (2.45)$$

ついで、図-2.1 に示す波の谷から平均水面までの高さ  $\delta$  は、

$$\frac{\delta}{h} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{H}{h} \right) \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \dots\dots\dots (2.46)$$

となり、波速は式(2.42)より次式となる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{2k^2} \left( \frac{H}{h} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} \dots\dots\dots (2.47)$$

さらに、水平および鉛直方向の水粒子速度  $u$  および  $w$  は、次式で表される。

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \left( \frac{H}{h} \right) \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} \dots\dots\dots (2.48)$$

$$\frac{w}{\sqrt{gh}} = \left\{ \frac{3}{k^2} \left( \frac{H}{h} \right)^3 \right\}^{1/2} \left( \frac{z}{h} \right) \text{cn} \vartheta \text{ sn} \vartheta \text{ dn} \vartheta \dots\dots\dots (2.49)$$

ここに、sn および dn は Jacobi のだ円関数である。また、波動運動に伴う圧力は、次式で表される。

$$\frac{p}{\rho gh} = 1 - \frac{z}{h} + \left( \frac{H}{h} \right) \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} \dots\dots\dots (2.50)$$

式(2.50)によれば、鉛直水粒子速度が存在するにもかかわらず第1次近似での圧力は静水圧分布であることがわかる。

なお、孤立波の場合には、 $k = 1$  および  $E/K = 0$  となるので、周知の第1次近似解が得られることになる。

#### b) 第2次近似解

第2次近似解に対する基礎方程式は、式(2.36)を用いれば、式(2.31)から次式のように導かれる。

$$\begin{aligned} -c_0 \eta_{2\sigma} + \frac{3}{2} (\eta_1 \eta_2)_\sigma + \frac{1}{6} \eta_{2\sigma\sigma\sigma} &= \frac{3}{20} (\eta_{1\sigma}^3)_\sigma - \frac{3}{10} (\eta_{1\sigma}^3)_\sigma + \frac{21}{10} c_0 (\eta_1^2)_\sigma - \frac{19}{10} c_0^2 \eta_{1\sigma} \\ &+ c_1 \eta_{1\sigma} \dots\dots\dots (2.51) \end{aligned}$$

したがって、上式を解けば求める第2次近似解を得ることができ、その一般解は、非斉次常微分方程式である上式の特解  $(\eta_2)_p$  および次式に示す斉次方程式

$$-c_0 \eta_{2\sigma} + \frac{3}{2} (\eta_1 \eta_2)_\sigma + \frac{1}{6} \eta_{2\sigma\sigma\sigma} = 0 \dots\dots\dots (2.52)$$

の一般解  $(\eta_2)_h$  の重ね合わせとして与えられる。特解  $(\eta_2)_p$  については式(2.51)より明らかなように第1次近似解  $\eta_1$  に対応した波動運動を表すものと考えられるが、一般解  $(\eta_2)_h$  については明らかではない。そこで、まず、一般解  $(\eta_2)_h$  について検討を行う。式(2.52)を  $\sigma$  に関して積分し、さらに式(2.37)

を用いて変形すると、次式に示す非斉次項を持つ Sturm-Liouville 型の方程式が導かれる。

$$\eta_{2\sigma\sigma} + \omega^2 P(\sigma) \eta_2 = \text{const.} \quad (2.53)$$

ここに、

$$P(\sigma) = 3 \operatorname{cn}^2 \vartheta + \frac{1}{k^2} - 2, \quad \omega^2 = 3 \left( \frac{H L^2}{h^3} \right) \quad (2.54)$$

ここでは、この解の特性を検討するという立場から、非斉次項  $\text{const.}$  をゼロとして解の誘導を試みることにすれば、この場合  $\omega^2 \gg 1$  であることから、WKB法の適用が可能となる。 $P(\sigma)$  は1周期の間に  $1/k^2 - 2$  から  $1/k^2 + 3$  まで変化し、 $k \approx 1$  の場合には解は転位点を持つことになる。したがって、 $P(\sigma) \leq 0$  に応じて解を求め、それを接続させることにする。

i)  $P(\sigma) > 0$  に対しては、

$$\eta_2 \sim S_1 P^{-1/4} \sin(\omega s + \theta_0) \quad (2.55)$$

となり、ここに、 $s = \int P^{1/2} d\sigma \sim (1/2k) \{ (1-k^2)\sigma - 3E(\sigma) \}$  および  $E(\sigma)$  ; Jacobi の E 関数である。

ii)  $P(\sigma) < 0$  に対しては、

$$\eta_2 \sim S_2 (-P)^{-1/4} \exp(-\sigma s^*) \quad (2.56)$$

となり、ここに、 $s^* = \int (-P)^{1/2} d\sigma \sim (1/2k) \{ (1-k^2)\sigma - 3E(\sigma) \}$  である。さらに、

iii)  $P(\sigma) \sim 0$  に対しては、

$P(\sigma) = 0$  となるときの  $\sigma$  を  $\sigma_0$  とし、 $P(\sigma)$  を  $\sigma = \sigma_0$  の近傍で Taylor 展開すれば、次式が得られる。

$$P(\sigma) \sim (\sigma - \sigma_0) P_{\sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_0} \quad (2.57)$$

これを式 (2.50) に代入すれば、

$$\eta_{2\sigma\sigma} - 6\omega^2 \frac{(\sigma - \sigma_0)}{\chi} \operatorname{cnsndn} \eta_2 = 0 \quad (2.58)$$

となるが、 $\sigma > \sigma_0$  の場合には、

$$\sigma - \sigma_0 = \left( \frac{\chi}{6\omega^2 \operatorname{cnsndn}} \right)^{1/3} \theta \quad (2.59)$$

なる変換を行って次式が得られる。

$$\frac{d^2 \eta_2}{d\theta^2} - \theta \eta_2 = 0 \quad (2.60)$$

さらに、

$$\eta_2 = \theta^{1/2}, \quad \frac{2}{3} \theta^{3/2} = y \quad (2.61)$$

で表される変換を行えば、式 (2.58) は次式のようになる。

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dv}{dy} - (1 + \frac{1}{9} y^2) v = 0 \quad \dots\dots\dots (2.62)$$

この解は  $1/3$  次の Bessel 関数で表されるので、 $y \rightarrow +\infty$  で指数関数的に減少する解を求めると、次式のようになる。

$$\eta_2 \sim S_2 \theta^{-1/4} \exp(-\frac{2}{3} \theta^{3/2}) \quad \dots\dots\dots (2.63)$$

一方、 $\sigma < \sigma_0$  の場合にも、

$$\left. \begin{aligned} \eta_2 &= \theta^{*1/2} v, \quad \frac{2}{3} (\theta^*)^{3/2} = y \\ \sigma_0 - \sigma &= \left\{ \frac{\chi}{6 \omega^2 \text{cnsndn}} \right\}^{1/3} \theta^* \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.64)$$

で表される変換によって、式 (2.58) は次式のようになる。

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dv}{dy} + (1 - \frac{1}{9y^2}) v = 0 \quad \dots\dots\dots (2.65)$$

そこで  $\theta^* \rightarrow 0$  において、 $\eta_2 \rightarrow 4 \cdot 8^{-2/3} S_2$  となるような解を求めると、次式のようになる。

$$\eta_2 \sim \frac{1}{2} S_2 \theta^{*-1/4} \sin(\frac{2}{3} \theta^{*3/2} + \frac{\pi}{4}) \quad \dots\dots\dots (2.66)$$

これから、 $S_2 = 2S_1$  および  $\theta_0 = \pi/4$  となる。

以上の i), ii), および iii) で求められた解を解析的に接続させれば、 $\text{const.} = 0$  とした場合の一般解  $(\eta_2)_h$  が得られる。ここでは、その 1 例として  $h/H = 6$  および  $T\sqrt{g/h} = 30$  の場合の波についてこれらの諸式を計算した結果を図-2.2 に示す。

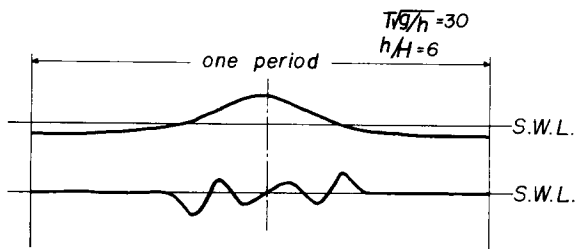


図-2.2 第2次近似解による高周期成分波の発生

この場合、主波に対してこの一般解で表される波は、その位相のみを一致させ、振幅に対しては便宜的に主波と同じスケールで表している。これから、第2次近似解においてクノイド波あるいは孤立波などの主波に重畳される高周波成分の発生のあることがわかる。しかしながら、本論文ではいわゆる定形波の理論を展開するために、第1次近似解に対応した波動成分のみを取扱うこととし、求める第2次近似解としては上述の特解  $(\eta_2)_p$  のみを用いることにする。これより、式 (2.51) の解は次式のように表される。

$$\eta_2 = (\eta_2)_p = A_1 \text{cn}^4 \vartheta + A_2 \text{cn}^2 \vartheta + A_3 + A_4 \vartheta \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta \quad \dots\dots\dots (2.67)$$

上式を式 (2.51) に代入し、未定係数法によって係数  $A_1$  および  $A_2$  を決めるとともに、永年項がゼロとなるように  $c_1$  を決定すれば、その結果は以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{3}{4}(\beta-r)^2, \quad A_2 = -\frac{1}{2}(\beta+r)(\alpha+4\beta+r) \\ A_3 &= -\frac{9}{20}(\alpha-\beta)(\beta-r) - \frac{19}{60}(r+\alpha)^2 + \frac{1}{60}\beta(46\alpha+29\beta+46r) + \frac{2}{3}c_1 \\ A_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.68)$$

また、第2次近似解においても波速は特性曲線によって決定されるべきであるが、式(2.68)より明らかに $\eta_2$ の表示式に波速を表す未知数 $c_1$ が含まれているため、特性曲線の表示式を適用できない。そこで、次式の波形の連続条件

$$\int_0^{2K} \eta d\vartheta = \varepsilon \int_0^{2K} \eta_1 d\vartheta + \varepsilon^2 \int_0^{2K} \eta_2 d\vartheta = 0 \quad \dots\dots\dots (2.69)$$

を用いると、まず積分定数 $\alpha, \beta$ および $r$ は、新しい未知定数 $\lambda$ および母数 $k$ の関数として次式のように表される。

$$\varepsilon\alpha = -\frac{\lambda}{k^2}\left(\frac{E}{K}\right), \quad \varepsilon\beta = -\frac{\lambda}{k^2}\left(\frac{E}{K} + k^2 - 1\right), \quad \varepsilon r = -\frac{\lambda}{k^2}\left(\frac{E}{K} - 1\right) \quad \dots\dots\dots (2.70)$$

ついで、上式を式(2.68)に適用し、さらに式(2.69)を用いれば、求める未知定数 $A_1, A_2, A_3$ および $c_1$ は次式のように $\lambda$ および $k$ の関数として表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 A_1 &= \frac{3}{4}\lambda^2, \quad \varepsilon^2 A_2 = -\frac{\lambda^2}{2k^2}\left\{6\left(\frac{E}{K}\right) + 4k^2 - 5\right\}, \\ \varepsilon^2 A_3 &= \frac{\lambda^2}{4k^4}\left\{4\left(\frac{E}{K}\right)\left\{3\left(\frac{E}{K}\right) + 4k^2 - 5\right\} + 5k^4 - 13k^2 + 8\right\} \\ \varepsilon^2 c_1 &= \frac{\lambda^2}{40k^4}\left\{45\left(\frac{E}{K}\right)\left\{3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4\right\} + 19k^4 - 64k^2 + 64\right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.71)$$

未知定数 $\lambda$ は次式に示す波高に関する条件より決定される。

$$\frac{H}{h} = \varepsilon(\eta_{max} - \eta_{min}) = \varepsilon(r - \beta) + \varepsilon^2(A_1 + A_2) \quad \dots\dots\dots (2.72)$$

式(2.68)および(2.70)より、上式は $\lambda$ に関する2次方程式となり、 $\lambda > 0$ の条件より、結局 $\lambda$ は次式に示すように与えられる。

$$\lambda = \frac{2k^2}{12(E/K) + 5k^2 - 10} \left(1 - \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h}\right)\left\{12\left(\frac{E}{K}\right) + 5k^2 - 10\right\}\right]^{1/2}\right) \quad \dots\dots\dots (2.73)$$

以上より、最後にただ一つ残った母数 $k$ を次式に示す周期性の条件を用いて決定すれば、 $\lambda$ を展開パラメターとする $T\sqrt{g/h}$ および $h/H$ に対するクノイド波の第2次近似解が定まる。

$$2K(k) = \frac{1}{2k}(3\lambda)^{1/2}(1 + \varepsilon_c^*)T\sqrt{\frac{g}{h}} \quad \dots\dots\dots (2.74)$$

ところで、式 (2.73) で示される  $\lambda$  は  $H/h$  の無理関数となっているため、その有理化を行えば、 $H/h$  を展開パラメータとすることができ、Laitone らの理論との比較上都合がよい。よって、 $(1/k^2)(H/h) \ll 1$  とすれば、次式のように展開され、有理式で表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= (\lambda)_{approx} + O\left\{\left(\frac{H}{h}\right)^3\right\} \\ (\lambda)_{approx} &= \left(\frac{H}{h}\right) + \frac{1}{4k^2}\left(\frac{H}{h}\right)^2\left\{12\left(\frac{E}{K}\right) + 5k^2 - 10\right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.75)$$

したがって、ここでは式 (2.73) で定義された  $\lambda$  を展開パラメータとする第 2 次近似解および (2.75) で表されたように有理化のために  $H/h$  を展開パラメータとする第 2 次近似解を示すことにする。

i)  $\lambda$  を展開パラメータとする第 2 次近似解

波形に関しては、次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{z'}{h} &= \lambda \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[ 4 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 5k^4 - 13k^2 + 8 \right] \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left\{ 6 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \lambda^2 \text{cn}^4 \vartheta \dots\dots\dots (2.76) \end{aligned}$$

ここに、

$$\vartheta = \frac{1}{2k} (3\lambda)^{1/2} \left( \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \dots\dots\dots (2.77)$$

波の谷から平均水面までの高さ  $\delta$  は、次式のようになる。

$$\frac{\delta}{h} = \frac{\lambda}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) - \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[ 4 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 5k^4 - 13k^2 + 8 \right] \dots\dots\dots (2.78)$$

第 2 次近似での波速は、すでに述べたように式 (2.71) より、Stokes の波速の定義を用いることなく次式で表される。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{\lambda}{2k^2} \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{\lambda^2}{40k^4} \left[ 45 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + 19k^4 - 64k^2 + 64 \right] \dots\dots\dots (2.79)$$

また、水平および鉛直水粒子速度は、それぞれ次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} &= \lambda \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[ 3k^2(k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 2 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 4 \left( \frac{E}{K} \right) + 6k^2 - 7 \right\} + 2k^4 - 8k^2 + 6 \right] \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left\{ 3(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 5 \left( \frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{\lambda^2}{4} \left\{ 9 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \dots\dots\dots (2.80) \end{aligned}$$

$$\frac{w}{\sqrt{gh}} = \left( \frac{3}{k^2} \lambda^3 \right)^{1/2} \left( \frac{z}{h} \right) \text{cn} \vartheta \, \text{sn} \vartheta \, \text{dn} \vartheta \left( 1 - \frac{\lambda}{2k^2} \left[ (2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 5 \left( \frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 - \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} k^2 \text{cn}^2 \vartheta \right] \right) \dots\dots\dots (2.81)$$

さらに、波動に伴う圧力は、次式で表される。

$$\frac{p}{\rho g h} = 1 - \frac{z}{h} + \lambda \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[ 4 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 2k^4 - 10k^2 + 8 + 3k^2(k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right]$$

$$-\frac{\lambda^2}{2k^2}\left[6\left(\frac{E}{K}\right)-2k^2-2+3(2k^2-1)\left(\frac{z}{h}\right)^2\right]\text{cn}^2\vartheta+\frac{3}{4}\lambda^2\left\{3\left(\frac{z}{h}\right)^2-2\right\}\text{cn}^4\vartheta \dots\dots\dots (2.82)$$

上式から明らかなように、第2次近似では第1次近似と異なり、もはや静水圧分布ではなく、第2次近似解において生じる静水圧分布に対する補正項は次式で示される。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho g h} &= \frac{h+z'-z}{h} + \frac{3}{4k^2} \lambda^2 (k^2-1) \left\{ \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1 \right\} - \frac{3(2k^2-1)}{2k^2} \lambda^2 \left\{ \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1 \right\} \text{cn}^2\vartheta \\ &+ \frac{9}{4} \lambda^2 \left\{ \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1 \right\} \text{cn}^4\vartheta \dots\dots\dots (2.83) \end{aligned}$$

孤立波に対しては、第1次近似の場合と同様、前述したクノイド波の第2次近似解において、 $k \rightarrow 1$ 、 $E/K \rightarrow 0$ および  $\text{cn}^2\vartheta \rightarrow \text{sech}^2\vartheta$  とすれば、以下ようになる。まず、式(2.73)に示す展開パラメター $\lambda$ は、次式のようになる。

$$\lambda_s = \frac{1}{5} \left[ \left\{ 1 + 5 \left( \frac{H}{h} \right) \right\}^{1/2} - 1 \right] \dots\dots\dots (2.84)$$

そして、波形は、次式で表される。

$$\frac{z'}{h} = \lambda_s \text{sech}^2\vartheta + \frac{1}{2} \lambda_s^2 \text{sech}^2\vartheta + \frac{3}{4} \lambda_s^2 \text{sech}^4\vartheta \dots\dots\dots (2.85)$$

ここに、

$$\vartheta = \frac{1}{2} (3\lambda_s)^{1/2} \left( \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \dots\dots\dots (2.86)$$

波速は、次式となる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \lambda_s + \frac{19}{40} \lambda_s^2 \dots\dots\dots (2.87)$$

また、水平および鉛直水粒子速度は、それぞれ次式で表される。

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \lambda_s \text{sech}^2\vartheta - \frac{\lambda_s^2}{2} \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} \text{sech}^2\vartheta + \frac{\lambda_s^2}{4} \left\{ 9 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \text{sech}^4\vartheta \dots\dots\dots (2.88)$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} &= (3\lambda_s^3)^{1/2} \left( \frac{z}{h} \right) \text{sech}^2\vartheta (1 - \text{sech}^2\vartheta)^{1/2} \left[ 1 - \frac{\lambda_s}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} + \frac{\lambda_s}{2} \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \text{sech}^2\vartheta \right] \\ &\dots\dots\dots (2.89) \end{aligned}$$

さらに、圧力は次式で表される。

$$\frac{p}{\rho g h} = 1 - \frac{z}{h} + \lambda_s \text{sech}^2\vartheta - \frac{\lambda_s^2}{2} \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \text{sech}^2\vartheta + \frac{3}{4} \lambda_s^2 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} \text{sech}^4\vartheta \dots\dots\dots (2.90)$$

## ii) $H/h$ を展開パラメターとする第2次近似解

ここでは、実用上の簡便さおよび $H/h$ の効果をあらわにするため、 $\lambda$ を $H/h$ に対して有理化し、 $H/h$ を展開パラメターとした第2次近似解を示す。このため、式(2.75)より定まる $(\lambda)_{approx}$ を上述した式(2.76)から式(2.90)に及ぶ諸式に用いて、 $(H/h)^2$ のオーダーで整理すれば、まず波形は次式によって



表される。

$$\begin{aligned} \frac{z'}{h} = & \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K}\right) + k^2 - 1 \right\} + \frac{1}{4k} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ \left(\frac{E}{K}\right) (k^2 - 2) + 2k^2 - 2 \right\} \\ & + \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \{ \text{cn}^4 \vartheta - \text{cn}^2 \vartheta \} \dots\dots\dots (2.91) \end{aligned}$$

ここに、

$$\vartheta = \left\{ \frac{3}{4k^2} \left(\frac{H}{h}\right) \right\}^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{8k^2} \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ 12 \left(\frac{E}{K}\right) + 5k^2 - 10 \right\} \right] \left( \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \dots\dots\dots (2.92)$$

波の谷から平均水面までの高さは、次式のようになる。

$$\frac{\delta}{h} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{H}{h}\right) \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1\right) - \frac{1}{4k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ \left(\frac{E}{K}\right) (k^2 - 2) + 2k^2 - 2 \right\} \dots\dots\dots (2.93)$$

波速は次式で表される。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{2k^2} \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K}\right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{9}{8k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left(\frac{E}{K}\right) \left(\frac{E}{K} - k^2 + 2\right) - \frac{3}{20k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 (k^4 - 6k^2 + 6) \dots\dots\dots (2.94)$$

また、水平および鉛直水粒子速度は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} = & \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1\right) \right\} - \frac{1}{4k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ -3k^2 (k^2 - 1) \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 4 \left(\frac{E}{K}\right) + 5k^2 - 8 \right\} + 3k^4 - 7k^2 + 4 \right\} \\ & + \frac{1}{4k^2} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ -6(2k^2 - 1) \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 2 \left(\frac{E}{K}\right) + 7k^2 - 6 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{1}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 9 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \dots\dots (2.95) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} = & \left\{ \frac{3}{k^2} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \right\}^{1/2} \left(\frac{z}{h}\right) \left( 1 + \frac{1}{8k^2} \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ 4(1 - 2k^2) \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 16 \left(\frac{E}{K}\right) + 19k^2 - 22 + 4k^2 \left\{ 3 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^2 \vartheta \right\} \right) \\ & \text{cn} \vartheta \text{ sn} \vartheta \text{ dn} \vartheta \dots\dots\dots (2.96) \end{aligned}$$

さらに、圧力は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho gh} = & 1 - \left(\frac{z}{h}\right) + \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1\right) \right\} - \frac{1}{4k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ \left(\frac{E}{K}\right) (k^2 - 2) + 3k^4 - 5k^2 + 2 - 3k^2 (k^2 - 1) \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right\} \\ & + \frac{3}{4k^2} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 3k^2 - 2 - 2(2k^2 - 1) \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 3 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \dots\dots\dots (2.97) \end{aligned}$$

なお、孤立波に対しては、前述した  $H/h$  を展開パラメーターとする第2次近似解において、 $k \rightarrow 1$ ,  $E/K \rightarrow 0$  および  $\text{cn}^2 \vartheta \rightarrow \text{sech}^2 \vartheta$  とすれば、以下のような表示が得られる。まず、波形は次式で表される。

$$\frac{z'}{h} = \left(\frac{H}{h}\right) \text{sech}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \text{sech}^2 \vartheta (\text{sech}^2 \vartheta - 1) \dots\dots\dots (2.98)$$

ここに、

$$\vartheta = \left\{ \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h}\right) \right\}^{1/2} \left[ 1 - \frac{5}{8} \left(\frac{H}{h}\right) \right] \left( \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \dots\dots\dots (2.99)$$

波速は次式で表される。

$$\frac{c}{\sqrt{g}h} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h}\right) - \frac{3}{20}\left(\frac{H}{h}\right)^2 \dots\dots\dots (2.100)$$

また、水平および鉛直水粒子速度はそれぞれ次式で表される。

$$\frac{u}{\sqrt{g}h} = \left(\frac{H}{h}\right)\text{sech}^2\vartheta - \frac{1}{4}\left(\frac{H}{h}\right)^2\left\{6\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1\right\}\text{sech}^2\vartheta + \frac{1}{4}\left(\frac{H}{h}\right)^2\left\{9\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 4\right\}\text{sech}^4\vartheta \dots\dots\dots (2.101)$$

$$\frac{w}{\sqrt{g}h} = \left\{3\left(\frac{H}{h}\right)^3\right\}^{1/2}\left(\frac{z}{h}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\left(\frac{H}{h}\right)\left[-4\left(\frac{z}{h}\right)^2 + 7 - 4\left\{3\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 4\right\}\text{sech}^2\vartheta\right]\right)\text{sech}^2\vartheta(1 - \text{sech}^2\vartheta)^{1/2} \dots\dots\dots (2.102)$$

さらに、孤立波の圧力は、次式で表される。

$$\frac{p}{\rho g h} = 1 - \frac{z}{h} + \left(\frac{H}{h}\right)\text{sech}^2\vartheta - \frac{3}{4}\left(\frac{H}{h}\right)^2\left\{2\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1\right\}\text{sech}^2\vartheta + \frac{3}{4}\left(\frac{H}{h}\right)^2\left\{3\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2\right\}\text{sech}^4\vartheta \dots\dots (2.103)$$

### c) 第3次近似解

第3次近似解に対する方程式は、式(2.31)から次式が導かれる。

$$\begin{aligned} -c_0\eta_{3\sigma} + \frac{3}{2}(\eta_1\eta_2)_\sigma + \frac{1}{6}\eta_{3\sigma\sigma\sigma} &= c_1\eta_{2\sigma} + c_2\eta_{1\sigma} - \frac{3}{2}\eta_2\eta_{2\sigma} - \frac{3}{2}\eta_{1\sigma}\eta_{2\sigma\sigma} \\ &- \frac{3}{2}\eta_{2\sigma}\eta_{1\sigma\sigma} - \frac{2}{3}\eta_1\eta_{2\sigma\sigma\sigma} - \frac{3}{2}c_0\eta_2\eta_{1\sigma} + 3\eta_1\eta_2\eta_{1\sigma} - \frac{1}{15}\eta_{2\sigma\sigma\sigma\sigma} + c_1\eta_1\eta_{1\sigma} \\ &+ \frac{1}{6}c_0\eta_{2\sigma\sigma\sigma} - \frac{3}{2}\eta_1^2\eta_{2\sigma} + \frac{5}{2}c_0\eta_1\eta_{2\sigma} - \frac{1}{2}c_0^2\eta_{2\sigma} + \frac{569}{70}c_0^2\eta_1\eta_{1\sigma} - \frac{87}{70}c_0\eta_1^2\eta_{1\sigma} \\ &+ \frac{111}{14}c_0\eta_{1\sigma}\eta_{1\sigma\sigma} - \frac{55}{14}c_0^3\eta_{1\sigma} - \frac{423}{70}\eta_1\eta_{1\sigma}\eta_{1\sigma\sigma} - \frac{261}{70}\eta_1^3\eta_{1\sigma} - \frac{10}{7}(\eta_{1\sigma})^3 \dots\dots\dots (2.104) \end{aligned}$$

第2次近似解と同様、上式の解として第1次近似解に対応した特解のみを考えれば、求めるべき解は次式のように仮定される。

$$\eta_3 = (\eta_3)_p = B_1\text{cn}^6\vartheta + B_2\text{cn}^4\vartheta + B_3\text{cn}^2\vartheta + B_4 + B_5\vartheta\text{cn}\vartheta\text{sn}\vartheta\text{dn}\vartheta \dots\dots\dots (2.105)$$

上式を式(2.104)に代入し、未定係数法によって $B_1, B_2, B_3$ および $B_4$ を決定するとともに、永年項がゼロとなるように $B_5$ および $c_2$ を決定すれば、それらは次式のように表される。

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{101}{80}(\beta-r)^3, \quad B_2 = \frac{1}{80}(\alpha-302\beta+r)(\beta-r) \\ B_3 &= \frac{1}{80}(\beta-r)^2\{30\alpha^2 + (31-180J_2+480J_1)\beta^2 + (30-180J_2-120J_1)r^2 + (19+120J_1)\alpha\beta \\ &+ (19+360J_2-360J_1)\beta r - (19+120J_1)r\alpha\}, \quad B_5 = 0 \\ B_4 &= \frac{101}{80}(\beta-r)^2(\alpha-\beta) + \frac{1}{120}(2\alpha+\beta+r)\{27(\alpha-\beta)(\beta-r) + 19(\alpha+r)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta(46\alpha + 29\beta + 46r) - \frac{1}{840}(\beta - r)\{659\alpha^2 + 393\beta^2 + 140r^2 - 4668\alpha\beta \\
& + 7506\beta r - 6630r\alpha\} - \frac{1}{420}(\alpha + \beta + r)^2(155\alpha - 723\beta + 155r) \\
& + \frac{1}{12}(\alpha + \beta + r)(\alpha + 4\beta + r)(\alpha + 10\beta - r) - \frac{1}{105}\beta(154\alpha^2 + 376\alpha\beta \\
& + 184\beta r + 14r^2) + \frac{1}{5}(\alpha r^2 + \alpha^2 r - \alpha^3 - r^3 + 8\alpha\beta r) - \frac{343}{70}\beta^3 \\
& - \frac{1}{3}(\alpha - 5\beta + r)c_1 + \frac{2}{3}c_2, \quad J_2 = \frac{1}{3k^4}\left\{\frac{E}{K}(4k^2 - 2) + 3k^4 - 5k^2 + 2\right\}
\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.106)$$

また、積分定数 $\alpha$ ,  $\beta$ および $r$ も、式(2.70)と同様の関係で表され、波速を表す未知定数 $c_2$ は、次式に示す波形に関する連続条件を用いて決定される。

$$\int_0^{2K} \eta d\vartheta = \int_0^{2K} (\varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \varepsilon^3\eta_3) d\vartheta = 0, \quad \vartheta = \frac{1}{2}(3\lambda)^{1/2}\sigma \quad \dots\dots\dots (2.107)$$

これより、第3次近似解 $\eta_3$ を決定するために必要な定数 $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$ および $c_2$ は、次式のように未知定数 $\lambda$ および母数 $k$ の関数として表される。

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 B_1 &= \frac{101}{80}\lambda^3, \quad \varepsilon^3 B_2 = -\frac{\lambda^3}{80k^2}\left\{300\frac{E}{K} + 302k^2 - 301\right\} \\
\varepsilon^3 B_3 &= \frac{\lambda^3}{k^4}\left[\frac{E}{K}\left\{\frac{83}{8}\frac{E}{K} + \frac{53}{4}k^2 - 17\right\} + \frac{331}{80}k^4 - \frac{861}{80}k^2 + 7\right] \\
\varepsilon^3 B_4 &= \frac{\lambda^3}{k^6}\left[-\frac{1}{8}\frac{E}{K}\left\{83\frac{E}{K} + 149k^2 - 199\right\} - \frac{1}{200}\frac{E}{K}\{2108k^4 - 5833k^2 + 3933\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{13}{8}k^6 + \frac{3083}{400}k^4 - \frac{4499}{400}k^2 + \frac{1033}{200}\right] \\
\varepsilon^3 c_2 &= \frac{\lambda^3}{5600k^6}\left[10\frac{E}{K}\left\{6927\frac{E}{K} + 10799k^2 - 14112\right\} - 2\frac{E}{K}\{4603k^4 \right. \\
& \quad \left. + 77092k^2 - 80317\} - 24155k^6 + 74838k^4 - 5959k^2 - 41974\right]
\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.108)$$

さらに、未知定数 $\lambda$ は次式に示す波高に関する条件を用いて決定される。

$$\frac{H}{h} = \varepsilon(\eta_{max} - \eta_{min}) = \varepsilon(r - \beta) + \varepsilon^2(A_1 + A_2) + \varepsilon^3(B_1 + B_2 + B_3) \quad \dots\dots\dots (2.109)$$

式(2.70), (2.71)および(2.108)を上式に代入すれば、上式は $\lambda$ に関する次の3次方程式となる。

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (2.110)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{20k^2\{12(\frac{E}{K})+5k^2-10\}}{10(\frac{E}{K})\{83(\frac{E}{K})+76k^2-136\}+130k^4-560k^2+560} \\
 a_2 &= \frac{80k^4}{10(\frac{E}{K})\{83(\frac{E}{K})+76k^2-136\}+130k^4-560k^2+560} \\
 a_3 &= \frac{80k^4(\frac{H}{h})}{10(\frac{E}{K})\{83(\frac{E}{K})+76k^2-136\}+130k^4-560k^2+560}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.111)$$

それ故、式 (2.110) を Cardano の公式を用いて解けば、実根はただ 1 つ存在し、次式で表される。

$$\lambda = A^{\sqrt[3]{3}} - (-B)^{\sqrt[3]{3}} - \frac{a_1}{3} \dots\dots\dots (2.112)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 A &= -\frac{a_1^3}{27} + \frac{a_1 a_2}{6} - \frac{a_3}{2} + \frac{1}{6}(27a_3^2 + 4a_2^2 - a_1^2 a_2^2 + 4a_1^3 a_3 - 18a_1 a_2 a_3)^{\sqrt[3]{2}} \\
 B &= -\frac{a_1^3}{27} + \frac{a_1 a_2}{6} - \frac{a_3}{2} - \frac{1}{6}(27a_3^2 + 4a_2^2 - a_1^2 a_2^2 + 4a_1^3 a_3 - 18a_1 a_2 a_3)^{\sqrt[3]{2}}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.113)$$

最後にただ 1 つ残った未知量である母数  $k$  を、次式を用いて  $h/H$  および  $T\sqrt{g/h}$  に対して決定すれば、クノイド波理論の第 3 次近似解が確定されることになる。

$$2K(k) - \frac{1}{2k}(3\lambda)^{\sqrt[3]{2}}(1+\epsilon c^*)T\sqrt{\frac{g}{h}} = 0 \dots\dots\dots (2.114)$$

ところで、この場合も第 2 次近似と同様、 $\lambda$  は  $H/h$  に関する無理関数となっているため、第 2 次近似解の場合と同様に式 (2.112) を有理化すれば、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda &= (\lambda)_{approx} + O\{(\frac{H}{h})^4\} \\
 (\lambda)_{approx} &= (\frac{H}{h}) + \frac{1}{4k^2}(\frac{H}{h})^2\{12(\frac{E}{K})+5k^2-10\} - \frac{1}{16k^4}(\frac{H}{h})^3[-(\frac{E}{K})\{22(\frac{E}{K})+32k^2-32\}+k^4-12k^2+12]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.115)$$

i)  $\lambda$  を展開パラメータとする第3次近似解

第3次近似での波形は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{h} = & \lambda \left\{ cn^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[ 4 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 5k^4 - 13k^2 + 8 \right] \\ & - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left[ 6 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right] cn^2 \vartheta + \frac{3}{4} \lambda^2 cn^4 \vartheta - \frac{\lambda^3}{8k^6} \left[ \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 83 \left( \frac{E}{K} \right) + 149k^2 - 199 \right\} \right. \\ & + \frac{1}{25} \left( \frac{E}{K} \right) \{ 2108k^4 - 5833k^2 + 3933 \} + 13k^6 - \frac{5083}{50} k^4 + \frac{4499}{50} k^2 - \frac{1033}{25} \left. \right] \\ & + \frac{\lambda^3}{8k^4} \left[ \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 83 \left( \frac{E}{K} \right) + 106k^2 - 136 \right\} + \frac{331}{10} k^4 - \frac{861}{10} k^2 + 56 \right] cn^2 \vartheta \\ & - \frac{\lambda^3}{80k^2} \left\{ 300 \left( \frac{E}{K} \right) + 302k^2 - 301 \right\} cn^4 \vartheta + \frac{101}{80} \lambda^3 cn^6 \vartheta \dots\dots\dots (2.116) \end{aligned}$$

ここに、

$$\vartheta = \frac{1}{2k} (3\lambda)^{1/2} \left\{ \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right\} \dots\dots\dots (2.117)$$

また、波の谷から平均水面までの距離  $\delta$  は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{h} = & \frac{\lambda}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) - \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[ 4 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 5k^4 - 13k^2 + 8 \right] \\ & + \frac{\lambda^3}{8k^6} \left[ \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 83 \left( \frac{E}{K} \right) + 149k^2 - 199 \right\} + \frac{1}{25} \left( \frac{E}{K} \right) \{ 2108k^4 - 1693k^2 + 3923 \} \right. \\ & + \left. 13k^6 - \frac{3083}{50} k^4 + \frac{4499}{50} k^2 - \frac{1033}{25} \right] \dots\dots\dots (2.118) \end{aligned}$$

第3次近似でのクノイド波の波速も、第1次および第2次近似の場合と同様に、Stokes の波速の定義を用いることなく、水面条件によって一義的に決定されることになり、次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{gh}} = & 1 - \frac{\lambda}{2k^2} \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{\lambda^2}{40k^4} \left[ 45 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right] + 19k^4 - 64k^2 + 64 \left. \right] \\ & + \frac{\lambda^3}{k^6} \left[ \frac{1}{560} \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 6927 \left( \frac{E}{K} \right) + 10799k^2 - 14112 \right\} - \frac{1}{2800} \left( \frac{E}{K} \right) \{ 4603k^4 + 77092k^2 - 80317 \} \right. \\ & - \left. \frac{1}{5600} (24155k^6 - 74838k^4 + 5959k^2 + 41974) \right] \dots\dots\dots (2.119) \end{aligned}$$

また、水平および鉛直方向の水粒子速度はそれぞれ次式で示される。

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \lambda \left\{ cn^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[ 2 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 4 \left( \frac{E}{K} \right) + 6k^2 - 7 \right\} + 5k^4 - 11k^2 + 6 + 3k^2 (k^2 - 1) \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \left] - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left\{ 5 \left( \frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 + 3(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{\lambda^2}{4} \left\{ 9 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \right. \\
& - \frac{3\lambda^3}{16k^4} \left[ (2k^4 - 3k^2 + 1) \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 2 \left\{ 5 \left( \frac{E}{K} \right) (k^2 - 1) - k^4 - k^2 + 2 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \\
& - \frac{\lambda^3}{200k^6} \left[ 50 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 24 \left( \frac{E}{K} \right) + 50k^2 - 61 \right\} + \left( \frac{E}{K} \right) (1063k^4 - 3563k^2 + 2563) \right. \\
& + 55k^6 - 614k^4 + 1272k^2 - 713 \left. \right] + \frac{\lambda^3}{16k^4} \left[ 3(17k^4 - 17k^2 + 2) \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 12 \left\{ 5 \left( \frac{E}{K} \right) (2k^2 - 1) \right. \right. \\
& - 8k^4 + 3k^2 + 2 \left. \left. \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 4 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 31 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 32 \right\} - \frac{2}{5} (k^4 + 9k^2 - 81) \right] \text{cn}^2 \vartheta \\
& - \frac{3\lambda^3}{80k^2} \left[ 75(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 50 \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) - 7k^2 + 2 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 24 \left\{ 5 \left( \frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 \right\} \right] \text{cn}^4 \vartheta \\
& + \frac{3\lambda^3}{80} \left\{ 75 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 200 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 32 \right\} \text{cn}^6 \vartheta \quad \dots\dots\dots (2.120)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{w}{\sqrt{g}h} &= \left[ \frac{3}{k^2} \lambda^3 \right]^{1/2} \left( \frac{z}{h} \right) \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta \left( 1 - \frac{\lambda}{2k^2} \left[ 5 \left( \frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 + (2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 - \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} k^2 \text{cn}^2 \vartheta \right] \right. \\
& + \frac{\lambda^2}{40k^4} \left[ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^4 (17k^4 - 17k^2 + 2) + 20 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left\{ 5 \left( \frac{E}{K} \right) (2k^2 - 1) - 8k^4 + 3k^2 + 2 \right\} \right. \\
& + 20 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 58 \left( \frac{E}{K} \right) + 38k^2 - 77 \right\} + 178k^4 - 558k^2 + 522 \left. \right] - \frac{\lambda^2}{20k^2} \left[ 45 \left( \frac{z}{h} \right)^4 (2k^2 - 1) \right. \\
& + 50 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) - 7k^2 + 2 \right\} - 90 \left( \frac{E}{K} \right) + 162k^2 - 36 \left. \right] \text{cn}^2 \vartheta + \frac{3\lambda^2}{40} \left\{ 45 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 200 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 96 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \left. \right) \\
& \dots\dots\dots (2.121)
\end{aligned}$$

さらに、圧力は次式のように表される。

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\rho g h} &= 1 - \frac{z}{h} + \lambda \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[ 3k^2 (k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 4 \left( \frac{E}{K} \right) \right. \\
& \left. \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 2k^4 - 10k^2 + 8 \right] - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left[ 3(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 6 \left( \frac{E}{K} \right) - 2k^2 - 2 \right] \\
& \text{cn}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \lambda^2 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} \text{cn}^4 \vartheta - \frac{3\lambda^3}{16k^4} (2k^4 - 3k^2 + 1) \left( \frac{z}{h} \right)^4 - \frac{3\lambda^3}{4k^4} \\
& \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) (k^2 - 1) - k^4 + 1 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 - \frac{\lambda^3}{200k^6} \left[ 25 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 83 \left( \frac{E}{K} \right) + 149k^2 - 199 \right\} \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{E}{K}\right) (1358k^4 - 5083k^2 + 3933) \\
& + 100k^6 - 829k^4 + 1762k^2 - 1033 \Big] + \frac{\lambda^3}{80k^4} \Big[ 15(17k^4 - 17k^2 + 2)\left(\frac{z}{h}\right)^4 \\
& + 60\left\{6\left(\frac{E}{K}\right)(2k^2 - 1) - 9k^4 + 3k^2 + 2\right\}\left(\frac{z}{h}\right)^2 + 10\left(\frac{E}{K}\right)\left\{83\left(\frac{E}{K}\right) - 14k^2 - 76\right\} \\
& + 16k^4 + 54k^2 + 170 \Big] \operatorname{cn}^2 \vartheta + \frac{\lambda^3}{80k^2} \Big[ -225(2k^2 - 1)\left(\frac{z}{h}\right)^4 - 60\left\{9\left(\frac{E}{K}\right) - 19k^2 + 5\right\} \\
& \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 600\left(\frac{E}{K}\right) - 152k^2 - 134 \Big] \operatorname{cn}^4 \vartheta + \frac{\lambda^3}{80} \{225\left(\frac{z}{h}\right)^4 - 660\left(\frac{z}{h}\right)^2 + 176\} \operatorname{cn}^6 \vartheta \dots \dots \quad (2.122)
\end{aligned}$$

なお、式(2.83)と同様な表示によれば、上式は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\rho gh} &= \frac{h+z'-z}{h} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \Big[ 3k^2(k^2-1)\left\{\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1\right\} \Big] - \frac{3(2k^2-1)}{2k^2} \lambda^2 \left\{\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1\right\} \operatorname{cn}^2 \vartheta \\
& + \frac{9}{4} \lambda^2 \left\{\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1\right\} \operatorname{cn}^4 \vartheta - \frac{3\lambda^3}{16k^4} (2k^4 - 3k^2 + 1)\left(\frac{z}{h}\right)^4 - \frac{3\lambda^3}{4k^4} \left\{3\left(\frac{E}{K}\right)(k^2 - 1) - k^4 + 1\right\} \left(\frac{z}{h}\right)^2 \\
& + \frac{3\lambda^3}{16k^4} \left\{20\left(\frac{E}{K}\right)(k^2 - 1) + 6k^4 - 19k^2 + 13\right\} + \frac{3\lambda^3}{16k^4} \Big[ (17k^4 - 17k^2 + 2)\left(\frac{z}{h}\right)^4 \\
& + 4\left\{6\left(\frac{E}{K}\right)(2k^2 - 1) - 9k^4 + 3k^2 + 2\right\}\left(\frac{z}{h}\right)^2 - 40\left(\frac{E}{K}\right)(2k^2 - 1) - 21k^4 + 61k^2 - 26 \Big] \\
& \operatorname{cn}^2 \vartheta + \frac{3\lambda^3}{16k^2} \Big[ -15(2k^2 - 1)\left(\frac{z}{h}\right)^4 - 4\left\{9\left(\frac{E}{K}\right) - 19k^2 + 5\right\}\left(\frac{z}{h}\right)^2 + 60\left(\frac{E}{K}\right) + 10k^2 - 29 \Big] \\
& \operatorname{cn}^4 \vartheta + \frac{3\lambda^3}{16} \left\{15\left(\frac{z}{h}\right)^4 - 44\left(\frac{z}{h}\right)^2 + 5\right\} \operatorname{cn}^6 \vartheta \dots \dots \dots \quad (2.123)
\end{aligned}$$

第1次および第2次近似の場合と同様に、孤立波に対しては、 $k \rightarrow 1$ ,  $K \rightarrow \infty$  および  $\operatorname{cn}^2 \vartheta \rightarrow \operatorname{sech}^2 \vartheta$  とすれば、以下の諸式が導びかれる。まず、式(2.112)の  $\lambda$  は次式のように表示されることになる。

$$\begin{aligned}
\lambda_s &= \frac{1}{39} \left( \left[ \left\{ 18252\left(\frac{H}{h}\right) + 3680 \right\}^2 + (212)^3 \right]^{1/2} + 18252\left(\frac{H}{h}\right) + 3680 \right)^{1/3} \\
& - \frac{1}{39} \left( \left[ \left\{ 18252\left(\frac{H}{h}\right) + 3680 \right\}^2 + (212)^3 \right]^{1/2} - 18252\left(\frac{H}{h}\right) - 3680 \right)^{1/3} - \frac{10}{39} \dots \dots \dots (2.124)
\end{aligned}$$

そして、波形は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{z'}{h} &= \lambda_s \operatorname{sech}^2 \vartheta + \frac{\lambda_s^2}{4} \operatorname{sech}^2 \vartheta (2 + 3 \operatorname{sech}^2 \vartheta) + \frac{\lambda_s^3}{80} \operatorname{sech}^2 \vartheta (30 - \operatorname{sech}^2 \vartheta + 101 \operatorname{sech}^4 \vartheta) \\
& \dots \dots \dots (2.125)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\vartheta = \frac{1}{2} \left[ 3\lambda_s \right]^{1/2} \left( \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \quad \dots\dots\dots (2.126)$$

波速は,

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \lambda_s + \frac{19}{40} \lambda_s^2 + \frac{55}{112} \lambda_s^3 \quad \dots\dots\dots (2.127)$$

また, 水平および鉛直水粒子速度は, それぞれ次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} = & \lambda_s \operatorname{sech}^2 \vartheta - \frac{3}{2} \lambda_s^2 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta + \frac{1}{4} \lambda_s^2 \left\{ 9 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \operatorname{sech}^4 \vartheta \\ & + \frac{\lambda_s^3}{40} \left\{ 15 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 90 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 71 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta - \frac{3\lambda_s^3}{80} \left\{ 75 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 250 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 72 \right\} \operatorname{sech}^4 \vartheta \\ & + \frac{3}{80} \lambda_s^3 \left\{ 75 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 200 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 32 \right\} \operatorname{sech}^6 \vartheta \quad \dots\dots\dots (2.128) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} = & \left[ 3\lambda_s^3 \right]^{1/2} \left( \frac{z}{h} \right) \left[ 1 - \frac{1}{2} \lambda_s \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} + \frac{1}{2} \lambda_s \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta \right. \\ & + \frac{1}{20} \lambda_s^2 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 30 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 71 \right\} - \frac{1}{20} \lambda_s^2 \left\{ 45 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 250 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 126 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta \\ & \left. + \frac{3}{40} \lambda_s^2 \left\{ 45 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 200 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 96 \right\} \operatorname{sech}^4 \vartheta \right] \operatorname{sech}^2 \vartheta \{ 1 - \operatorname{sech}^2 \vartheta \}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (2.129) \end{aligned}$$

さらに, 圧力は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho gh} = & 1 - \frac{z}{h} + \lambda_s \operatorname{sech}^2 \vartheta - \frac{1}{2} \lambda_s^2 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \lambda_s^2 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} \operatorname{sech}^4 \vartheta \\ & + \frac{3}{8} \lambda_s^3 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 8 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 8 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta - \frac{1}{80} \lambda_s^3 \left\{ 225 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 840 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 286 \right\} \operatorname{sech}^4 \vartheta \\ & + \frac{1}{80} \lambda_s^3 \left\{ 225 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 660 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 176 \right\} \operatorname{sech}^6 \vartheta \quad \dots\dots\dots (2.130) \end{aligned}$$

ii)  $H/h$  を展開パラメーターとする第3次近似解

前述した第2次近似解の場合と同様に, 式(2.115)で表された  $(\lambda)_{approx}$  を用いて,  $(H/h)^3$  のオーダーで整理することにすれば, クノイド波の特性は以下のように表示される。まず, 波形は次式によって表される。

$$\begin{aligned} \frac{z'}{h} = & \left( \frac{H}{h} \right) \left\{ cn^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{1}{4k} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left\{ \left( \frac{E}{K} \right) (k^2 - 2) + 2k^2 - 2 \right\} + \frac{3}{4} \left( \frac{H}{h} \right)^2 cn^2 \vartheta (cn^2 \vartheta - 1) \\ & - \frac{1}{400k^6} \left( \frac{H}{h} \right)^3 \left\{ 100 \left( \frac{E}{K} \right)^2 (k^2 - 2) + \left( \frac{E}{K} \right) (16k^4 + 466k^2 - 466) - 133(k^4 - 3k^2 + 2) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{80k^2} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left\{ 60 \left(\frac{E}{K}\right) - 51k^2 + 1 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{1}{80k^2} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left\{ 60 \left(\frac{E}{K}\right) - 152k^2 + 1 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \\
& + \frac{101}{80} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \text{cn}^6 \vartheta \dots\dots\dots (2.131)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
\vartheta = & \left\{ \frac{3}{4k^2} \left(\frac{H}{h}\right) \right\}^{1/2} \left( 1 + \frac{1}{8k^2} \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ 12 \left(\frac{E}{K}\right) + 5k^2 - 10 \right\} + \frac{1}{128k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left(\frac{E}{K}\right) \{ 520 \left(\frac{E}{K}\right) + 488k^2 - 848 \} \right. \\
& \left. + 79k^4 - 348k^2 + 348 \right\} \left( \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \dots\dots\dots (2.132)
\end{aligned}$$

波の谷から平均水面までの高さは次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{h} = & \frac{1}{k^2} \left(\frac{H}{h}\right) \left(\frac{E}{K}\right) + k^2 - 1 - \frac{1}{4k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ \left(\frac{E}{K}\right) (k^2 - 2) + 2k^2 - 2 \right\} \\
& + \frac{1}{400k^6} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left\{ 100 \left(\frac{E}{K}\right)^2 (k^2 - 2) + \left(\frac{E}{K}\right) (16k^4 + 466k^2 - 466) - 133(k^4 - 3k^2 + 2) \right\} \dots\dots\dots (2.133)
\end{aligned}$$

波速は、次式で表される。

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\sqrt{gh}} = & 1 - \frac{1}{2k^2} \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K}\right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{9}{8k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left(\frac{E}{K}\right) \left(\frac{E}{K} - k^2 + 2\right) - \frac{3}{20k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 (k^4 - 6k^2 + 6) \\
& + \frac{1}{5600k^6} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left[ 100 \left(\frac{E}{K}\right)^2 \left\{ 11862 \left(\frac{E}{K}\right) + 16329k^2 - 23492 \right\} + 2 \left(\frac{E}{K}\right) \right. \\
& \left. \{ 5127k^4 - 110272k^2 + 110697 \} - 21705k^6 + 62938k^4 + 15041k^2 - 55974 \right] \dots\dots\dots (2.134)
\end{aligned}$$

また、水平および鉛直水粒子速度は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\sqrt{gh}} = & \left(\frac{H}{h}\right) \{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{2} \left(\frac{E}{K}\right) + k^2 - 1 \} - \frac{1}{4k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left[ -3k^2 (k^2 - 1) \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \left(\frac{E}{K}\right) \right. \\
& \left. \{ 4 \left(\frac{E}{K}\right) + 5k^2 - 8 \} + 3k^4 - 7k^2 + 4 \right] + \frac{1}{4k^2} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ -6(2k^2 - 1) \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 2 \left(\frac{E}{K}\right) + 7k^2 - 6 \right\} \\
& \text{cn}^2 \vartheta + \frac{1}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 9 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^4 \vartheta - \frac{3}{16k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^3 (2k^4 - 3k^2 + 1) \left(\frac{z}{h}\right)^4 + \frac{1}{8k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \\
& \{ 21 \left(\frac{E}{K}\right) (k^2 - 1) + 18k^4 - 42k^2 + 24 \} \left(\frac{z}{h}\right)^2 - \frac{1}{200k^6} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left[ 25 \left(\frac{E}{K}\right)^2 \{ 13 \left(\frac{E}{K}\right) + 21k^2 - 39 \} \right. \\
& \left. + \left(\frac{E}{K}\right) \{ 363k^4 - 1213k^2 + 963 \} + 105k^6 - 514k^4 + 722k^2 - 313 \right] \\
& + \frac{1}{80k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left[ 15(17k^4 - 17k^2 + 2) \left(\frac{z}{h}\right)^4 + 60 \left\{ -7 \left(\frac{E}{K}\right) (2k^2 - 1) - 18k^4 + 28k^2 - 8 \right\} \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 10 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 22k^2 - 20 \right\} + 218k^4 - 458k^2 + 202 \Big] \text{cn}^2 \vartheta \\
& - \frac{1}{80k^2} \left( \frac{H}{h} \right)^3 \left[ 225(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 30 \left\{ 21 \left( \frac{E}{K} \right) + 50k^2 - 40 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 120 \left( \frac{E}{K} \right) + 272k^2 - 256 \right] \text{cn}^4 \vartheta \\
& + \frac{3}{80} \left( \frac{H}{h} \right)^3 \left[ 75 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 200 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 32 \right] \text{cn}^6 \vartheta \quad \dots\dots\dots (2.135) \\
\frac{w}{\sqrt{gh}} = & \left\{ \frac{3}{k^2} \left( \frac{H}{h} \right)^3 \right\}^{1/2} \left( \frac{z}{h} \right) \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta \left( 1 + \frac{1}{8k^2} \left( \frac{H}{h} \right) \left[ 4(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 16 \left( \frac{E}{K} \right) + 19k^2 - 22 + 4k^2 \right. \right. \\
& \left. \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^2 \vartheta \right] + \frac{1}{640k^4} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left[ 24(17k^4 - 17k^2 + 2) \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 40 \left\{ -40 \left( \frac{E}{K} \right) (2k^2 - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. - 82k^4 + 137k^2 - 42 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 40 \left( \frac{E}{K} \right) \{ 169 \left( \frac{E}{K} \right) 264k^2 - 340 \} + 4239k^4 - 11244k^2 + 6956 \right] \right. \\
& \left. - \frac{1}{160k^2} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left[ 180(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 50 \left\{ 24 \left( \frac{E}{K} \right) + 43k^2 - 38 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 2040 \left( \frac{E}{K} \right) + 1648k^2 - 2144 \right] \text{cn}^2 \vartheta \right. \\
& \left. + \frac{3}{80} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \{ 45 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 200 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 96 \} \text{cn}^4 \vartheta \right) \quad \dots\dots\dots (2.136)
\end{aligned}$$

さらに、圧力は次式で表される。

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\rho gh} = & 1 - \frac{z}{h} + \left( \frac{H}{h} \right) \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{1}{4k^4} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left\{ 3k^2(k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 - \left( \frac{E}{K} \right) (k^2 - 2) \right. \\
& \left. - 3k^4 + 5k^2 - 2 \right\} - \frac{3}{4k^2} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left\{ 2(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3k^2 + 2 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \\
& - \frac{3}{16k^4} \left( \frac{H}{h} \right)^3 \left\{ (2k^4 - 3k^2 + 1) \left( \frac{z}{h} \right)^4 + \frac{1}{8k^4} \left( \frac{H}{h} \right)^3 \left\{ 18 \left( \frac{E}{K} \right) (k^2 - 1) + 21k^4 - 45k^2 + 24 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right. \\
& \left. - \frac{1}{200k^6} \left( \frac{H}{h} \right)^3 \left\{ 50 \left( \frac{E}{K} \right)^2 (k^2 - 2) + \left( \frac{E}{K} \right) (158k^4 - 383k^2 + 233) + 150k^6 - 479k^4 + 462k^2 - 133 \right\} \right. \\
& \left. + \frac{1}{80k^4} \left( \frac{H}{h} \right)^3 \left[ 15(17k^4 - 17k^2 + 2) \left( \frac{z}{h} \right)^4 - \left\{ 360 \left( \frac{E}{K} \right) (2k^2 - 1) + 1140k^4 - 1680k^2 + 480 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 60 \left( \frac{E}{K} \right) (3k^2 - 2) + 336k^4 - 586k^2 + 210 \right] \text{cn}^2 \vartheta + \frac{1}{80k^2} \left( \frac{H}{h} \right)^3 \left[ -225(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^4 \right. \right. \\
& \left. \left. + 30 \left\{ 18 \left( \frac{E}{K} \right) + 53k^2 - 40 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 120 \left( \frac{E}{K} \right) - 452k^2 + 466 \right] \text{cn}^4 \vartheta \right. \\
& \left. + \frac{1}{80} \left( \frac{H}{h} \right)^3 \left\{ 225 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 660 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 176 \right\} \text{cn}^6 \vartheta \right) \quad \dots\dots\dots (2.137)
\end{aligned}$$

なお、孤立波に対して、以上の諸式は、それぞれ次のように書き換えられる。まず、波形は次式のようになる。

$$\frac{z'}{h} = \left(\frac{H}{h}\right) \operatorname{sech}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \operatorname{sech}^2 \vartheta (\operatorname{sech}^2 \vartheta - 1) + \frac{1}{80} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \operatorname{sech}^2 \vartheta$$

$$\{101 \operatorname{sech}^4 \vartheta - 151 \operatorname{sech}^2 \vartheta + 50\} \dots\dots\dots (2.138)$$

ここに,

$$\vartheta = \left\{ \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h}\right) \right\}^{1/2} \left\{ 1 - \frac{5}{8} \left(\frac{H}{h}\right) + \frac{79}{128} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \right\} \left( \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \dots\dots\dots (2.139)$$

波速, 水粒子速度および圧力は, それぞれ以下になる。

$$\frac{c}{\sqrt{g}h} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h}\right) - \frac{3}{20} \left(\frac{H}{h}\right)^2 + \frac{3}{56} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \dots\dots\dots (2.140)$$

$$\frac{u}{\sqrt{g}h} = \left(\frac{H}{h}\right) \operatorname{sech}^2 \vartheta - \frac{1}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 6 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta + \frac{1}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 9 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 4 \right\} \operatorname{sech}^4 \vartheta$$

$$+ \frac{1}{80} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left\{ 30 \left(\frac{z}{h}\right)^4 + 120 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 38 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta - \frac{1}{80} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left\{ 225 \left(\frac{z}{h}\right)^4 - 300 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 16 \right\} \operatorname{sech}^4 \vartheta$$

$$+ \frac{3}{80} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left\{ 75 \left(\frac{z}{h}\right)^4 - 200 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 32 \right\} \operatorname{sech}^6 \vartheta \dots\dots\dots (2.141)$$

$$\frac{w}{\sqrt{g}h} = \left\{ 3 \left(\frac{H}{h}\right)^3 \right\}^{1/2} \left(\frac{z}{h}\right) \left[ 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{H}{h}\right) \left[ -4 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 3 + 4 \left\{ 3 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 4 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta \right] \right.$$

$$+ \frac{1}{640} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 48 \left(\frac{z}{h}\right)^4 + 520 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 49 \right\} - \frac{1}{160} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 180 \left(\frac{z}{h}\right)^4 - 250 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 496 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta$$

$$\left. + \frac{3}{80} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 45 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 200 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 96 \right\} \operatorname{sech}^4 \vartheta \right) \operatorname{sech}^2 \vartheta \left\{ 1 - \operatorname{sech}^2 \vartheta \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (2.142)$$

$$\frac{p}{\rho g h} = 1 - \frac{z}{h} + \left(\frac{H}{h}\right) \operatorname{sech}^2 \vartheta - \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 2 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 3 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2 \right\} \operatorname{sech}^4 \vartheta$$

$$+ \frac{1}{80} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left\{ 30 \left(\frac{z}{h}\right)^4 + 60 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 40 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta + \frac{1}{80} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left\{ -225 \left(\frac{z}{h}\right)^4 + 390 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 14 \right\} \operatorname{sech}^4 \vartheta$$

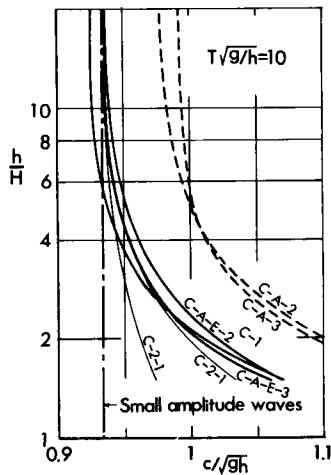
$$+ \frac{1}{80} \left(\frac{H}{h}\right)^3 \left\{ 225 \left(\frac{z}{h}\right)^4 - 660 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 176 \right\} \operatorname{sech}^6 \vartheta \dots\dots\dots (2.143)$$

### (3) 新しいクノイド波理論の特性および従来のクノイド波理論との比較

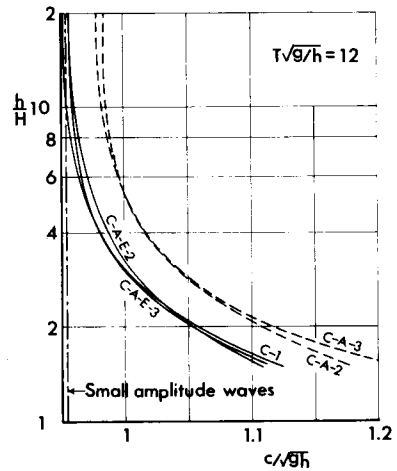
ここでは, 前述した新しいクノイド波理論の特性を明らかにするため, Laitone のクノイド波理論との比較において波速および水粒子速度の特性を明らかにするとともに, 波のエネルギー, エネルギーフラックスおよび質量輸送に関する表示を導き, 近似解の収束性の検討およびそれらの特性を考察する。さらに, この理論に基づいて極限波高の関係を導くことにする。

a) 波 速

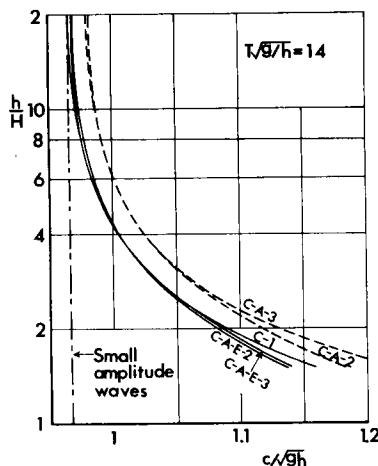
図-2.3は、新しいクノイド波理論の無次元波速  $c/\sqrt{gh}$  を、 $T\sqrt{g/h}$  をパラメータとして  $h/H$  との関係で図示したものである。図中、C-1, C-A-2, およびC-A-3は、それぞれ式(2.38)(2.94)および(2.134)に示した  $H/h$  を展開パラメータとする第1次, 第2次および第3次近似解を示し、またC-A-E-2およびC-A-E-3は、それぞれ式(2.79)および(2.119)に示した  $\lambda$  を展開パラメータとする第2次および第3次近似解を表す。これより、このクノイド波理論の近似解の収束性は、 $H/h$  を展開パラメータとする場合について考察すれば、以下のである。すなわち、これらの近似解は  $T\sqrt{g/h}=10\sim30$  において一様な収束性を示しているが、 $T\sqrt{g/h}<20$  においては、C-1とC-A-2との相違が顕著になるだけでなく、C-A-2およびC-A-3のそれぞれの理論曲線の微小振幅波理論への収束性が悪くなることが明らかになる。したがって、 $H/h$  を展開パラメータとする近似解は実用上の簡便さという利点はあるが、このように解の収束性に若干の問題があるので、実用的には  $T\sqrt{g/h}$



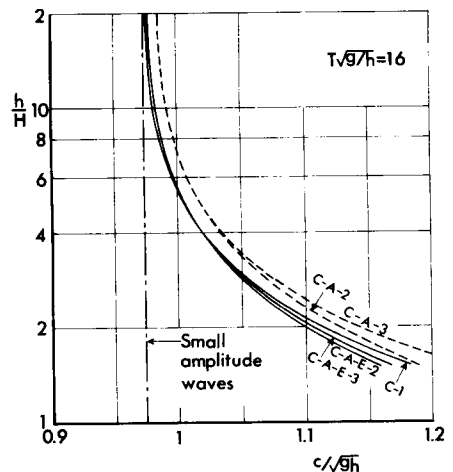
(a)



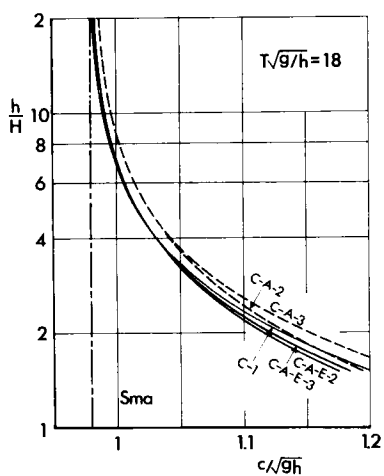
(b)



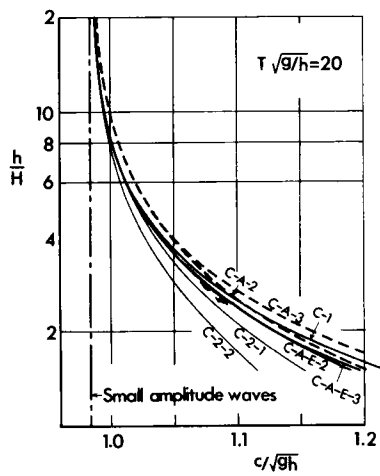
(c)



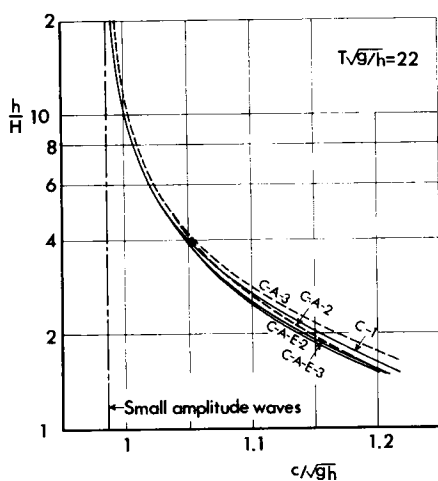
(d)



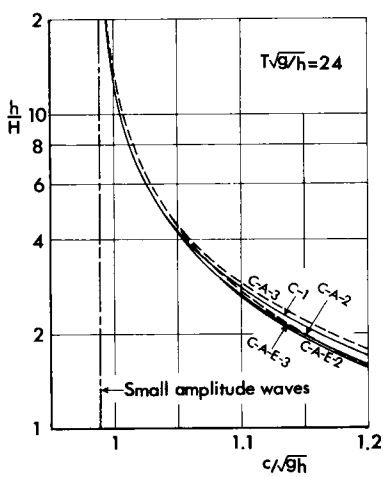
(e)



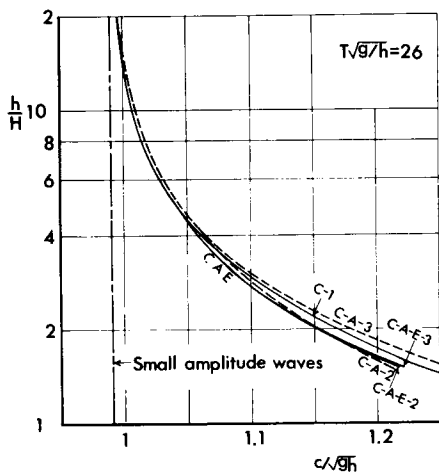
(f)



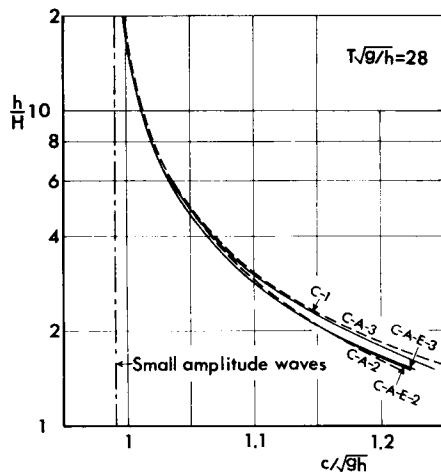
(g)



(h)



(i)



(j)

$\geq 1.8 \sim 2.0$  において用いられるべきと考えられる。

ついで、 $\lambda$  を展開パラメータとする場合について考察すれば、この近似解は、 $T\sqrt{g/h} = 1.0 \sim 3.0$  において近似次数の増加とともに一様な収束性を示し、かつ  $T\sqrt{g/h} < 2.0$  においても微小振幅波理論への良好な収束性を示すことがわかる。特に、 $T\sqrt{g/h} \geq 2.0$  では、C-A-E-3 と C-A-E-2 で表される理論曲線がほとんど一致することからも明らかのように、第3次近似解による補正はきわめて微小となり、その理論曲線は十分信頼できる結果を示していると言えよう。しかしながら、 $T\sqrt{g/h} = 1.0$  の場合には、第3次近似解による補正が若干増し、近似解の収束性は若干悪くなっているようである。これは  $\lambda$  を展開パラメータとする近似解が式(2.31)の厳密解にいかに近いものであっても、式(2.31)自体が元の基礎方程式(2.1)、(2.2)、(2.3)および(2.4)の近似式であるために常に近似誤差を伴い、これが  $T\sqrt{g/h}$  の減少すなわち  $\varepsilon$  の増大にともなって大きくなるためであると考えられる。したがって、 $T\sqrt{g/h} < 1.0$  の場合については、さらに高次近似解が必要となるが、近似解の収束性は  $T\sqrt{g/h} = 1.0 \sim 3.0$  において良好であることから、 $T\sqrt{g/h} \geq 1.0$  におけるより高次近似の取扱いとしては、 $\lambda$  を展開パラメータとする第2次あるいは第3次近似解を用いるべきであると結論される。

つぎに、著者の提案した新しいクノイド波理論と Laitone のクノイド波理論との比較を波速に関して行う。概説においても述べたように、Laitone<sup>20)</sup> は Stokes の波速の第2定義を用いて、クノイド波理論の展開を第2次近似まで行ったが、その後 Stokes の波速の第1定義を用いた場合の波速の計算を行い<sup>21)</sup>、波速の定義による相違を波速の表示式について明らかにしている。波速の第1および第2定義を用いて Laitone が誘導した波速の表示式を次式に示す。

$$\left(\frac{c}{\sqrt{gh}}\right)_I = 1 - \frac{1}{2k^2} \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{1}{120k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left[ -5\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 15\left(\frac{E}{K}\right) + 23k^2 - 40 \right\} - 33k^4 + 113k^2 - 98 \right] \quad (2.144)$$

$$\left(\frac{c}{\sqrt{gh}}\right)_{II} = 1 - \frac{1}{2k^2} \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{1}{40k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left[ 5\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + k^2 - 2 \right\} - 6k^4 + 16k^2 - 16 \right] \quad (2.145)$$

ここに、 $(c/\sqrt{gh})_I$  および  $(c/\sqrt{gh})_{II}$  はそれぞれ第1および第2定義を用いた波速を表す。

これより、第1次近似解では、式(2.144)および(2.145)は完全に一致し、波速の定義によって波速は

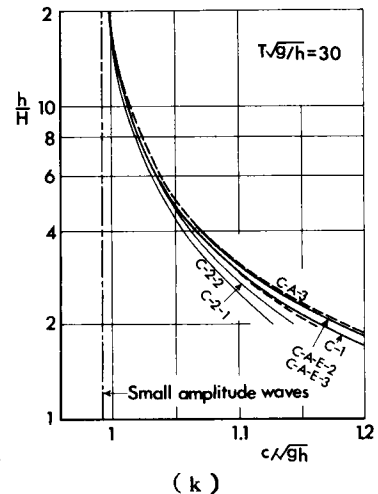


図-2.3 新しいクノイド波理論による波速の特性と Laitone の理論との比較



相違せず、式(2.144)および(2.145)は式(2.47)に一致し、新しいクノイド波理論による波速に等しいことがわかる。しかしながら、第2次近似解では、式(2.144)および(2.145)の両式は明らかに相違し、両式のいずれも式(2.94)に示した $H/h$ を展開パラメータとする新しいクノイド波理論の第2次近似解とも当然一致せず、波速の定義の影響が著しく現われることがわかる。そこで、波速の定義が波速に及ぼす影響を明らかにするために、 $T\sqrt{g/h}=10, 20$ および30の場合について、新しいクノイド波理論とLaitoneのクノイド波理論との比較を行う。これらの比較は、すでに前述の図-2.3に示されており、図中C-2-1およびC-2-2はそれぞれ式(2.144)および(2.145)に示したLaitoneのクノイド波理論による結果である。これから、C-A-2とC-A-1およびC-2-2の理論曲線を比較すれば、 $T\sqrt{g/h}=10, 20$ および30のいずれの場合についても、C-A-2はC-2-1およびC-2-2よりも過大な値を与え、 $T\sqrt{g/h}=10$ においてこの傾向が特に顕著になることがわかる。しかしながら、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなると、これらの相違も減少して行く傾向を示し、後述するように孤立波においては波速の定義の影響が現われないことと対応することがわかる。一方、C-A-E-2との比較においても、つねにC-A-E-2はC-2-1およびC-2-2よりも若干大きな値を与えることがわかる。

最後に、孤立波の場合について考察を行う。図-2.4は新しいクノイド波理論による孤立波の波速の関係を示したもので、図中の記号は図-2.3におけるものと同じである。これより、 $H/h$ を展開パラメータとする近似解の収束性について考察すれば、クノイド波の場合と同様にC-A-2による補正は若干大きい、この近似解は良好な収束性を示し、一定値に収束して行く傾向を示すことがわかる。ついで、 $\lambda$ を展開パラメータとする場合について考察すれば、さらに良好な収束性を確認することができる。さらに、Laitoneのクノイド波理論との比較では、孤立波の場合波による質量輸送が存在せず、また波速の第1および第2定義の間の相違が現われず、式(2.144)および(2.145)はともに次式に一致する。

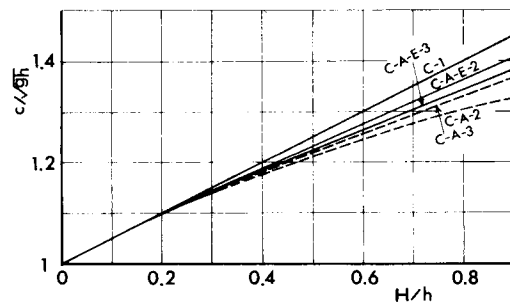


図-2.4 新しいクノイド波理論による孤立波の波速の特性

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h}\right) - \frac{3}{20}\left(\frac{H}{h}\right)^2 \dots\dots\dots (2.146)$$

これは、また式(2.100)とも一致し、C-2-1およびC-2-2はC-A-2に一致する。また、Byatt-Smith<sup>22)</sup>によって求められた孤立波の波速に関する数値解との比較を行えば、図-2.5のようになる。図中、B-2およびB-EはByatt-Smithの2次近似解および厳密解を示す。これから、著者の理論の収束性は、Byatt-Smithのものと対応し、両者ともに近似次数の高次化に伴ってB-Eで示される厳密解に接近していくことがわかる。しかしながら、Byatt-Smithの理論では解は数値解であり、実用上の簡便さという点で問題があるため、Fenton<sup>23)</sup>は $H/h$ を展開パラメータとして第9次近似解までの計算を行い、第3次近似解までの結果を示したが、その結果は、C-A-3で示される第3次近似解と一致し

ている。このように、孤立波では、近似解の収束性がきわめて良好であるばかりでなく、従来のような波速の定義の問題が実際上表われないという特徴を持っている。

#### b) 水平水粒子速度

図-2.6は、新しいクノイド波理論による水平水粒子速度の鉛直分布を  $T\sqrt{g/h}$  および  $h/H$  をパラメータとして表し、また比較のために Laitone のクノイド波理論による結果を示したものである。この場合、図中の記号は、図-2.3に示したものと同じである。波速の場合と同様に、まず  $h/H$  を展開パラメータとした場合の新しいクノイド波理論の近似解の収束性を考察する。図-2.6よりC-1で示されている第1次近似解では鉛直分布は現われず、C-A-2で示される第2次近似解においてはじめて鉛直分布が現われ、第2次近似解において大きく補正されることがわかる。そして、C-A-3で示される第3次近似解においてもさらに大きく補正される結果、 $h/H$

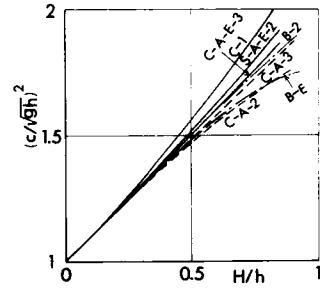
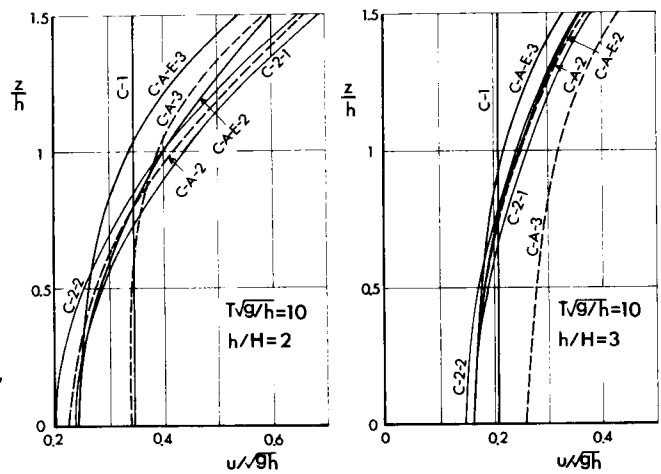


図-2.5 波速に関する Byatt-Smith の孤立波理論との比較



(a)

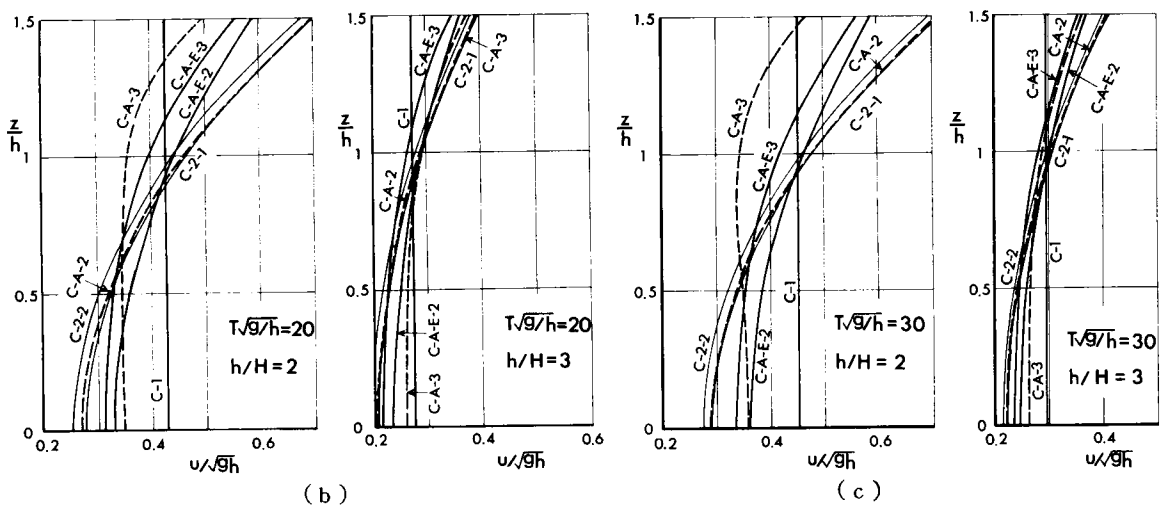


図-2.6 新しいクノイド波理論による水平水粒子速度の鉛直分布の特性と Laitone の理論との比較

$=2$  に対しては、 $T\sqrt{g/h} = 10, 20$  および  $30$  のいずれの場合でも、近似解の収束性はあまりよくないことがわかる。しかし、 $h/H = 3$  になるとこれらの収束性はかなり改善され、特に  $T\sqrt{g/h} = 20$  および  $30$  では良好な収束性を示し、近似解として十分実用性を持つようになることがわかる。

ついで、 $\lambda$  を展開パラメーターとする場合について考察すれば、この近似解は  $T\sqrt{g/h} = 10, 20$  および  $30$  のいずれの場合についても良好な収束性を示すことがわかる。そして、この収束性は  $T\sqrt{g/h}$  および  $h/H$  が大きくなるに従って良好になっているが、波速の場合と異なり、 $T\sqrt{g/h} = 30$  においても、 $C-A-E-2$  と  $C-A-E-3$  の両曲線がほとんど一致するほどには至らず、このことから水平水粒子速度についてはさらに高次近似解が必要であると言わなければならないであろう。しかしながら、 $\lambda$  を展開パラメーターとする近似解の収束性は、 $T\sqrt{g/h} = 10$  から  $30$  の範囲において十分満足すべきものであることは言うまでもなく、 $\lambda$  を展開パラメーターとする近似解は十分な精度を持っていると言えよう。以上より、 $H/h$  を展開パラメーターとする近似解の収束性については、 $T\sqrt{g/h} \geq 20$  かつ  $h/H \geq 3$  においてかなりよく収束する傾向が見られ、それ以外の領域では近使解の信頼性が著しく低下することがわかる。このため、このような領域における水平水粒子速度に対しては、実用上の簡便さという点では若干問題があるが、 $\lambda$  を有理化せずにそのまま用いた  $\lambda$  を展開パラメーターとする近似解を適用すべきであると考えられる。事実、 $\lambda$  を展開パラメーターとする近似解の収束性は、 $T\sqrt{g/h} \geq 10$  かつ  $h/H \geq 2$  において一様かつ良好であり、波速の場合と同様な傾向を示すことが明らかとなっている。

つぎに、新しいクノイド波理論と Laitone のクノイド波理論との比較を水平水粒子速度の鉛直分布に関して行う。Laitone のクノイド波理論<sup>21)</sup> では、波動に伴う水平水粒子速度が直接示されていないので、式 (2.144) および (2.145) に示した波速を用いて補正する必要がある。次式は、そうした補正を行って第 2 次近似解による波速の第 1 および第 2 定義による水平水粒子速度  $(u/\sqrt{gh})_I$  および  $(u/\sqrt{gh})_{II}$  を示したものである。

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{\sqrt{gh}}\right)_I = & \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{1}{120k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left[ 90k^2(k^2-1) \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right. \\ & - 10 \left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 6 \left(\frac{E}{K}\right) + 11k^2 - 16 \right\} - 10(9k^4 - 19k^2 + 10) \left. \right] + \frac{1}{4k^2} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \\ & \left\{ -6(2k^2-1) \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2 \left(\frac{E}{K}\right) + 3k^2 - 2 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{1}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \\ & \left\{ 9 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \dots\dots\dots (2.147) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{\sqrt{gh}}\right)_{II} = & \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{1}{120k^4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left[ 90k^2(k^2-1) \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 10 \left(\frac{E}{K}\right) \right. \\ & \left\{ 6 \left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 7 \right\} - 25(3k^4 - 5k^2 + 2) \left. \right] + \frac{1}{4k^2} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ -6(2k^2-1) \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right. \\ & - 2 \left(\frac{E}{K}\right) + 3k^2 - 2 \left. \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{1}{4} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ 9 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \dots\dots\dots (2.148) \end{aligned}$$

上式から、水平水粒子速度に対する波速の影響が明らかになるとともに、第2次近似解において波速の定義の影響が直接現われることがわかる。すでに図-2.6には、式(2.147)および(2.148)を用いて計算した理論曲線をそれぞれC-2-1およびC-2-2として示してある。これから、C-A-2、C-2-1およびC-2-2の各理論曲線はそれぞれよく対応し、その鉛直分布はほぼ一致していることがわかる。また、C-A-2はC-2-1およびC-2-2の両曲線の間値的な値を示しているが、 $T\sqrt{g/h}$ の増大とともにC-2-1に接近し、 $T\sqrt{g/h}=3.0$ ではほぼ一致するようになり、波速の場合と比較すると、Laitoneの理論との相違はさほど大きくないことがわかる。しかしながら、C-A-E-2とC-2-1およびC-2-2の曲線との比較を行うと、この場合には絶対値のみならず鉛直分布も相違し、C-A-E-2で示される近似解の鉛直分布の前傾が、Laitoneの理論に比べて小さくなっていることがわかる。このように、 $H/h$ を展開パラメーターとする場合については、著者の理論とLaitoneの理論の間の相違は若干小さくなっているが、水平水粒子速度についても両者の相違が明確に存在することがわかる。

### c) エネルギーおよびエネルギーフラックス

ここでは、 $\lambda$ を展開パラメーターとした第3次近似解を用いて、クノイド波のエネルギーおよびエネルギーフラックスを計算し、それらの数値計算結果から近似解の収束性を考察する。

まず、単位面積当りのクノイド波の位置エネルギー $E_p$ は、

$$\begin{aligned} \frac{E_p}{\rho g h^2} &= \frac{1}{\rho g h^2} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \rho g z dz dt \right\} \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \left\{ \varepsilon^2 \eta_1^2 + 2\varepsilon^3 \eta_1 \eta_2 + \varepsilon^4 (\eta_2^2 + 2\eta_1 \eta_3) + \dots \right\} dt \quad \dots\dots\dots (2.149) \end{aligned}$$

で表されるので、この表示に第3次近似解を代入して次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{E_p}{\rho g h^2} &= \frac{\lambda^2}{6k^4} \left[ -\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{30k^6} \left[ 90\left(\frac{E}{K}\right)^2 \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2\left(\frac{E}{K}\right) (11k^4 - 56k^2 + 56) - 11(k^4 - 3k^2 + 2) \right] + \frac{\lambda^4}{4200k^8} \left[ -25\left(\frac{E}{K}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. \{ 2496\left(\frac{E}{K}\right) + 3556k^2 - 6776 \} - \left(\frac{E}{K}\right)^2 (40208k^4 - 173558k^2 + 167958) - \left(\frac{E}{K}\right) \right. \\ &\quad \left. (5176k^6 - 47972k^4 + 110060k^2 - 72440) + 2588k^6 - 13995k^4 + 22814k^2 - 11407 \right] \quad (2.150) \end{aligned}$$

単位面積当りの運動エネルギー $E_k$ は、同様に

$$\begin{aligned} \frac{E_k}{\rho g h^2} &= \frac{1}{\rho g h^2} \left\{ \frac{1}{2T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \rho (u^2 + w^2) dz dt \right\} \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \left\{ \varepsilon^2 \eta_1^2 + \varepsilon^3 (2\eta_1 \eta_2 + 2\eta_1^3 - 2\eta_1^3 - 2c_0 \eta_1^2 + \frac{2}{3} \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} + \frac{1}{3} \eta_{1\sigma}^2) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^4 (\eta_2^2 + 2\eta_1\eta_3 + 6\eta_1^2\eta_2 + \frac{9}{4}\eta_1^4 + 3c_0^2\eta_1^2 - 4c_0\eta_1\eta_2 - 6c_0\eta_1^3 - 2c_1\eta_1^2 + \frac{2}{3}\eta_2\eta_{1\sigma\sigma} \\
& + \frac{2}{3}\eta_1\eta_{2\sigma\sigma} + \frac{2}{15}\eta_{1\sigma\sigma}^2 - \frac{4}{3}c_0\eta_1\eta_{1\sigma\sigma} + 3\eta_1^2\eta_{1\sigma\sigma} + \frac{7}{3}\eta_1\eta_{1\sigma}^2 + \frac{2}{3}\eta_{1\sigma}\eta_{2\sigma} \\
& + \frac{4}{15}\eta_{1\sigma}\eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \frac{2}{3}c_0\eta_{1\sigma}^2) + \dots \} dt \dots\dots\dots (2.151)
\end{aligned}$$

と表されるので、これから次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{E_k}{\rho g h^2} &= \frac{\lambda^2}{6k^4} \left[ -\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{30k^6} \left[ 15\left(\frac{E}{K}\right)^2 \left\{ 7\left(\frac{E}{K}\right) + 7k^2 - 14 \right\} \right. \\
&+ \left. \left(\frac{E}{K}\right) (26k^4 - 131k^2 + 131) - 13(k^4 - 3k^2 + 2) \right] \\
&+ \frac{\lambda^4}{4200k^8} \left[ -25\left(\frac{E}{K}\right)^3 \left\{ 3066\left(\frac{E}{K}\right) + 4312k^2 - 8288 \right\} - \left(\frac{E}{K}\right)^2 \left\{ 49308k^4 - 211008k^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left. 205408 \right\} - \left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 6776k^6 - 59472k^4 + 134960k^2 - 89040 \right\} \right. \\
&+ \left. 3388k^6 - 17570k^4 + 28364k^2 - 14182 \right] \dots\dots\dots (2.152)
\end{aligned}$$

以上より、クノイド波の単位面積当りの全エネルギー  $E_t$  は、次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{E_t}{\rho g h^2} &= \frac{E_p}{\rho g h^2} + \frac{E_k}{\rho g h^2} \\
&= \frac{\lambda^2}{3k^4} \left[ -\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{30k^6} \left\{ 195\left(\frac{E}{K}\right)^2 \left(\frac{E}{K}\right) + k^2 - 2 \right\} \\
&+ \left(\frac{E}{K}\right) (48k^4 - 243k^2 + 243) - 24(k^4 - 3k^2 + 2) \} \\
&+ \frac{\lambda^4}{4200k^8} \left[ -25\left(\frac{E}{K}\right)^3 \left\{ 5565\left(\frac{E}{K}\right) + 7868k^2 - 15064 \right\} - \left(\frac{E}{K}\right)^2 \left\{ 89516k^4 - 384566k^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left. 373366 \right\} - \left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 11952k^6 - 107444k^4 + 245020k^2 - 161480 \right\} + 5976k^6 \right. \\
&- \left. 31565k^4 + 51178k^2 - 25589 \right] \dots\dots\dots (2.153)
\end{aligned}$$

また、同様にエネルギーフラックス  $W$  は、

$$\begin{aligned}
\frac{W}{\rho g h^2} &= -\frac{1}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \rho \phi_t \phi_x dz dt \right\} \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \varepsilon^2 \eta_1^2 + \varepsilon^3 (2\eta_1\eta_2 - c_0\eta_1^2 + \frac{2}{3}\eta_1\eta_{1\sigma\sigma}) + \varepsilon^4 (2\eta_1\eta_3 + \eta_2^2 \right.
\end{aligned}$$

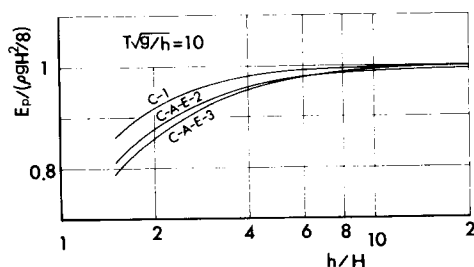
$$\begin{aligned}
& + 6\eta_1^2\eta_2 - 2c_0\eta_1\eta_2 - 4c_0\eta_1^3 - c_1\eta_1^2 + c_0^2\eta_1^2 + \frac{9}{4}\eta_1^4 + \frac{5}{3}\eta_1\eta_{1\sigma}^2 \\
& + \frac{4}{15}\eta_1\eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{2}{15}\eta_{1\sigma\sigma}^2 - \frac{2}{3}c_0\eta_1\eta_{1\sigma\sigma} + 3\eta_1^2\eta_{1\sigma\sigma} + \frac{2}{3}\eta_2\eta_{1\sigma\sigma} \\
& + \frac{2}{3}\eta_1\eta_{2\sigma\sigma} + \dots \} dt \dots\dots\dots (2.154)
\end{aligned}$$

で表されるので、結局次式が得られる。

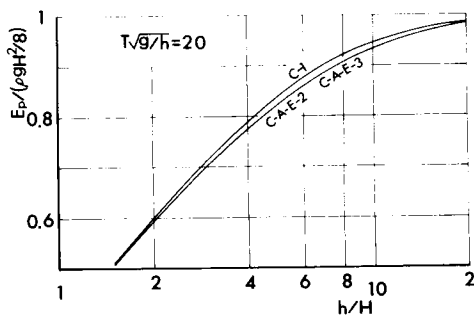
$$\begin{aligned}
\frac{W}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} &= \frac{\lambda^2}{3k^4} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] \\
&+ \frac{\lambda^3}{30k^6} \left[ 255 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left( \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right) + \left( \frac{E}{K} \right) (58k^4 - 313k^2 + 313) \right. \\
&- 29k^4 + 87k^2 - 58 \left. \right] + \frac{\lambda^4}{4200k^8} \left[ - 25 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 8463 \left( \frac{E}{K} \right) + 11732k^2 \right. \right. \\
&- 22792 \left. \left. \right\} - \left( \frac{E}{K} \right)^2 \{ 127211k^4 - 567161k^2 + 555961 \} - \left( \frac{E}{K} \right) \{ 16642k^6 \right. \\
&- 152174k^4 + 351070k^2 - 232180 \left. \right\} + 8321k^6 - 42765k^4 + 68888k^2 - 344444 \left. \right] \quad (2.155)
\end{aligned}$$

なお、以上の波のエネルギーおよびエネルギーフラックスに関する表示式では、それらの無次元表示を变形することによって、いずれも微小振幅波の諸量を用いて表すことができる。これらの特性を考察する場合には、微小振幅波との比較が重要であるので、以下の数値計算においては、そのような表示を用いることにしよう。

図-2.7は、前述したように微小振幅波の諸量を用いて無次元化したクノイド波の位置エネルギーの特性を、 $T\sqrt{g/h}$ および $h/H$ に対して示したものであり、図中の記号は前述の図-2.6と同じである。これから近似解による相違は、 $T\sqrt{g/h} = 1.0$ の場合に見られるだけで、 $T\sqrt{g/h} = 3.0$ ではほとんど



(a)



(b)

と見られず、 $T\sqrt{g/h} = 10 \sim 30$  においてはほぼ一定値に収束していることがわかる。したがって、第3次近似解による位置エネルギーの計算結果は、精度の高い結果を示していると言えよう。また、このことから逆に、波形に関する近似誤差は、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるにしたがって、急速に減少していくことがわかる。さらに、クノイド波の位置エネルギーの特性については、 $h/H$ が大きくなるに従って、C-1、C-A-E-2およびC-A-E-3の曲線はいずれも微小振幅波の値に収束する傾向を示すけれども、 $T\sqrt{g/h}$ および $H/h$ が増大すると、微小振幅波との相違が顕著になることがわかる。これは、 $T\sqrt{g/h}$ および $H/h$ が大きくなるに従って、卓越してくる波の非線形性によるものと考えられるので、こうした領域における微小振幅波理論の適用は問題のあることがわかる。

図-2.8は、前述の位置エネルギーの場合と同様に、微小振幅波の諸量を用いて無次元化したクノイド波の運動エネルギーの特性を示したものである。これから、近似解による相違は、 $T\sqrt{g/h} = 10$ において最も小さく、 $T\sqrt{g/h} = 20$ および $30$ では若干大きくなり、位置エネルギーの場合に比べて収束性は若干悪くなっているが、それでも $T\sqrt{g/h} = 10 \sim 30$ において一様な収束性を示していることがわかる。このように、運動エネルギーの収束性が位置エネルギーの場合に比べて若干悪くなっていることは、水粒子速度に関する近似解の収束性が、波形の場合に比べて十分でないことによるためであろう。

図-2.9は、次式に示す微小振幅波のエネルギーフラックス $W_s$ を用いて無次元化したクノイド波のエネルギーフラックスの特性を示したものである。

$$W_s = \frac{1}{16} \rho g H^2 \left\{ 1 + \frac{4\pi h/L}{\sinh 4\pi h/L} \right\} \left\{ \frac{gL}{2\pi} \tanh 2\pi h/L \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (2.156)$$

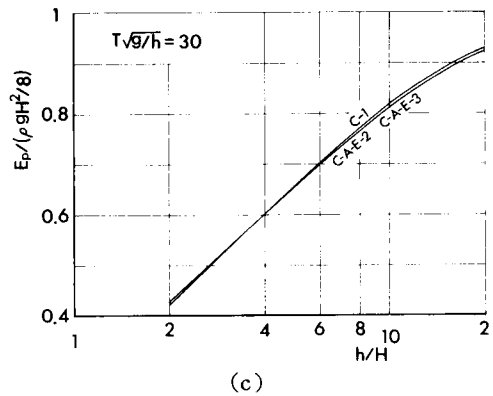


図-2.7 新しいクノイド波理論による位置エネルギーの特性

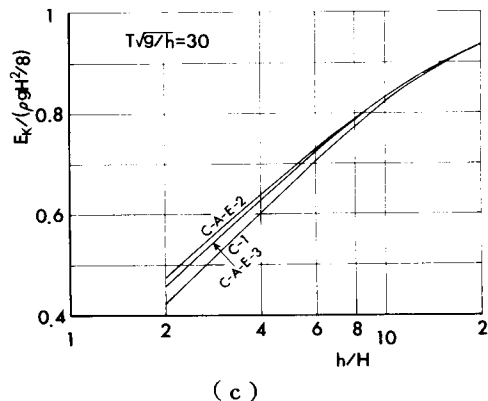
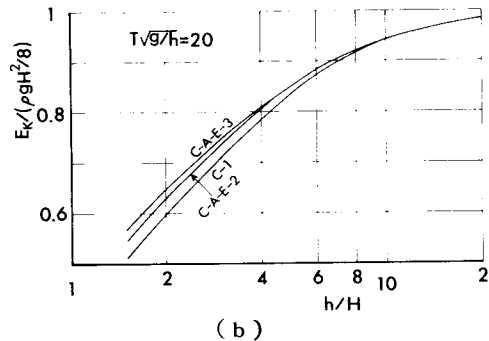
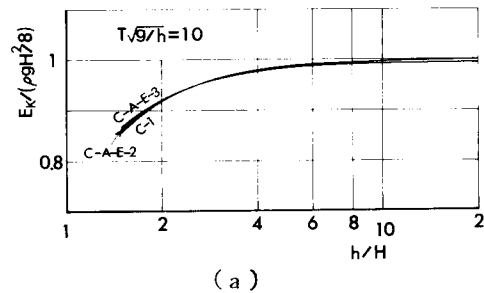


図-2.8 新しいクノイド波理論による運動エネルギーの特性

これから、近似による相違は、 $T\sqrt{g/h}=10$ においてきわめて大きく、近似の高次化に伴う収束性が全く見られないだけでなく、微小振幅波への接近もC-1およびC-A-E-2に関しては全く見られない。しかしながら、 $T\sqrt{g/h}=20$ および30では、近似解の高次化に伴う収束性はかなり改善され、一様に収束する傾向を示すとともに、 $h/H$ が大きくなるに従って、C-1、C-A-E-2およびC-A-E-3の各理論曲線は微小振幅波の値に近づく傾向を示している。こうしたエネルギーフラックスに関する近似解の特性は、エネルギーフラックスが波の分散性に強く依存することを示し、 $T\sqrt{g/h}=10$ の場合のように分散性が非線形性に比べて卓越していると、第3次近似解でもなお分散性に対する近似が不十分であることを示すものと言えよう。

以上、クノイド波のエネルギーおよびエネルギーフラックスの特性を、近似による相違および微小振幅波の諸量との比較で検討した。その結果、エネルギーフラックスの場合に若干問題はあるが、エネルギーなどの2次量に対しても、新しいクノイド波理論は一様な収束性を示し、近似解ではあるが、十分信頼できる精度を持つことがわかった。また、 $T\sqrt{g/h}$ および $h/H$ が大きくなるに従って、非線形性が卓越し、そのために微小振幅波の諸量との相違がきわめて大きくなり、沿岸海域での波に伴う水理現象の究明に有限振幅波理論が必須となることがわかった。

さらに、クノイド波のエネルギー輸送速度について考察する。微小振幅波理論では、エネルギー輸送速度と群速度とは一致しているが、クノイド波ではその関係は必ずしも明確ではない。ここでは、次式によってクノイド波のエネルギー輸送速度を定義する。

$$c_g = \frac{W}{E_p + E_k} \dots\dots\dots (2.157)$$

図-2.10は、上式によって定義されたエネルギー輸送速度の特性を $T\sqrt{g/h}$ および $h/H$ に対して示したものである。これから $T\sqrt{g/h}=10$ では近似解による相違が大きく、一様な収束性は見られないが、 $T\sqrt{g/h}=20$ および30では一様な収束性が見られ、一定値に収束する傾向を示すことがわかる。また、

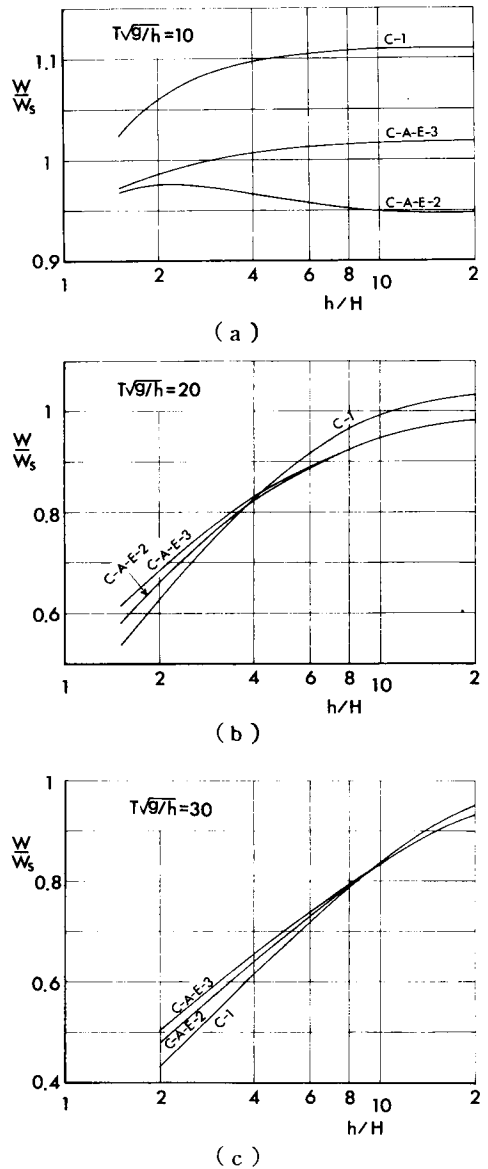


図-2.9 新しいクノイド波理論によるエネルギーフラックスの特性



$c_g/\sqrt{gh}$  の  $T\sqrt{g/h}$  に対する特性では、 $T\sqrt{g/h}$  が大きくなるに従って、 $c_g/\sqrt{gh}$  に接近する傾向を示し、エネルギー輸送速度が分散・非線形比に対応することがわかる。さらに、エネルギー輸送速度に対する波高の影響は第2次近似解においてはじめて現われ、波高の増大とともにエネルギー輸送速度も大きくなることをわかる。

#### d) 質量輸送

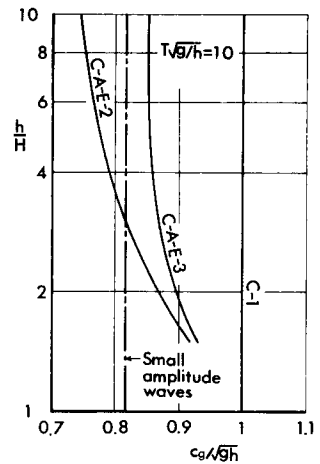
前述したように、新しいクノイド波理論においては、その解が一義的に決定されているため、従来の有限振幅波理論で存在した質量輸送の任意性の問題は完全に解消されている。まず、Euler 座標における水平水粒子速度の一周期当りの平均速度  $\bar{u}$  は、次式によって定義されるが、ここではこれを Euler 座標における質量輸送速度と言うことにする。

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad \dots\dots\dots (2.158)$$

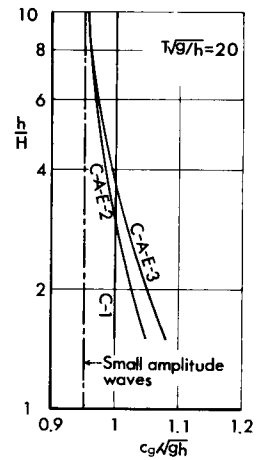
ここで、 $\lambda$  を展開パラメータとした第3次近似解を用いれば、これは次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = & \frac{\lambda^2}{6k^4} \left[ -\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] \\ & + \frac{\lambda^3}{20k^6} \left[ 35\left(\frac{E}{K}\right)^2 \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} + \left(\frac{E}{K}\right) (6k^4 - 41k^2 + 41) \right. \\ & \left. - 3k^4 + 9k^2 - 6 \right] \quad \dots\dots\dots (2.159) \end{aligned}$$

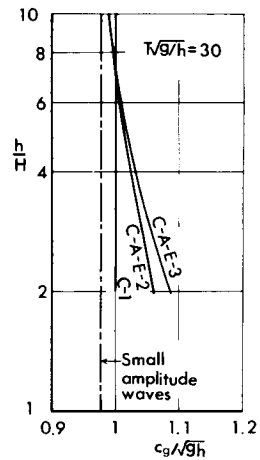
これから、かような質量輸送速度は第3次近似解の範囲では  $z$  に独立であり、そのオーダーは  $O(\lambda^2)$  であることがわかる。ところでこのような水粒子の平均速度成分が生じる理由は、以下のように考えられる。すなわち、式(2.34)に示されるように、 $O(\epsilon)$  のオーダーでは、 $\eta$  で示される水面変動と水平水粒子速度とが対応して非周期成分は生じないが、 $O(\epsilon^2)$  のオーダーでは、水粒子速度に鉛直分布を与える分散項  $\eta_{00}$  の外に非線形効果を表す  $\eta^2$  が加わるので、その効果によって水平水粒子速度に非周期成分が生じるものと考えられる。このように、この理論では非線形効果によって Lagrange 座標のみならず Euler 座標においても平均速度成分が生じ、前者のいわゆる Stokes drift 以外に後者によっても質量が輸送されることがわかる。したがって、従来の有限振幅波理論においてもこうした非線形効果による質量輸送速度が定義されるにも拘わらず、Stokes の波速の定義によって消去されてしまっていたと考えられる。図-2.11 は  $\bar{u}/\sqrt{gh}$  の  $h/H$  および  $T\sqrt{g/h}$  との



(a)



(b)



(c)

図-2.10 新しいクノイド波理論によるエネルギー輸送速度の特性

関係を示すもので、これから $\bar{u}/\sqrt{gh}$ のオーダーは $T\sqrt{g/h}$ に依存するが、たかだか波速の1%程度であることがわかる。

つぎに、質量流束 (mass flux) は、次式のように表される。

$$\frac{Q}{\rho h \sqrt{gh}} = \frac{Q_1}{\rho h \sqrt{gh}} + \frac{Q_2}{\rho h \sqrt{gh}} \quad \dots\dots\dots (2.160)$$

ここに、

$$\frac{Q_1}{\rho h \sqrt{gh}} = \frac{1}{Th} \int_0^T \int_0^h \frac{u}{\sqrt{gh}} dz dt \quad \dots\dots\dots (2.161)$$

$$\frac{Q_2}{\rho h \sqrt{gh}} = \frac{1}{Th} \int_0^T \int_h^{h+z'} \frac{u}{\sqrt{gh}} dz dt \quad \dots\dots (2.162)$$

であり、 $Q_1$  は質量輸送速度 $\bar{u}$ によって生じる質量流束を示し、また  $Q_2$  は水平水粒子速度と水面変動との相互作用効果によって生じる質量流束を示す。これらの式を第3次近似解を用いて計算すれば、それぞれ次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{\rho h \sqrt{gh}} (= \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}}) &= \frac{\lambda^2}{6k^4} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{20k^6} \left[ 35 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{E}{K} \right) (6k^4 - 41k^2 + 41) - 3k^4 + 9k^2 + 6 \right] \quad \dots\dots\dots (2.163) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_2}{\rho h \sqrt{gh}} &= \frac{\lambda^2}{3k^4} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{20k^6} \left[ 110 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{E}{K} \right) (28k^4 - 138k^2 + 138) - 14(k^4 - 3k^2 + 2) \right] \quad \dots\dots\dots (2.164) \end{aligned}$$

なお、これらの表示から式 (2.160) は、次式のようにも表される。

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\rho h \sqrt{gh}} &= \frac{\lambda^2}{2k^4} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{20k^6} \left[ 145 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{E}{K} \right) (34k^4 - 179k^2 + 179) - 17(k^4 - 3k^2 + 2) \right] \quad \dots\dots\dots (2.165) \end{aligned}$$

図-2.12は、質量流束 $Q$ と $h/H$ および $T\sqrt{g/h}$ との関係を示したものであり、質量輸送速度に関する図-2.11との関係から、 $Q_1$ と $Q_2$ との比は約1/2であることがわかる。また、この質量流束 $Q$ から波によって輸送される全質量の輸送速度 $Q/\rho h$ を求めれば、そのオーダーは $T\sqrt{g/h}$ によるけれども波速の4%程度にも及び、決して微量でないことが認識されよう。

一方、実際にEuler座標における質量輸送速度 $\bar{u}$ を直接測定することは、一般にきわめて困難であり、微小な中立粒子の追跡によって質量輸送の測定を行う場合には、測定された流速はLagrange座標におけるものに対応するので、ここではLagrange座標における質量輸送速度を求めておくことにする。このことはま

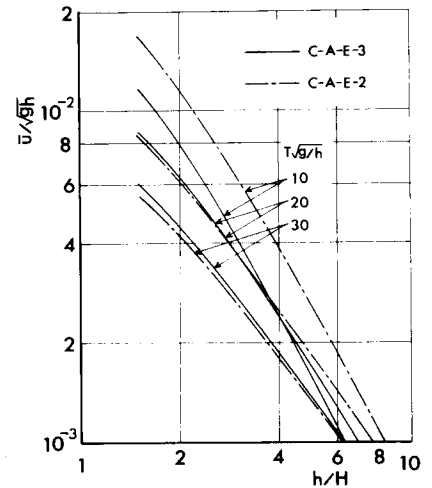


図-2.11 クノイド波の質量輸送速度

た、クノイド波による水粒子の軌跡を知るためにも、有用であることは周知のとおりである。Lagrange 座標での水粒子の速度ベクトル  $\mathbf{U} (=U\mathbf{i}+W\mathbf{k})$  は Euler 座標での速度ベクトル  $\mathbf{u} (u\mathbf{i}+w\mathbf{k})$  を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(\mathbf{a}, t) &= \mathbf{u} \left\{ \mathbf{a} + \int_0^t \mathbf{U} dt, t \right\} \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{a}, t) + \left\{ \int_0^t \mathbf{u} dt \right\} \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \left\{ \int_0^t \mathbf{u} dt \right\}^2 \\ &\quad \nabla^2 \mathbf{u} + \left\{ \int_0^t \left( \int_0^t \mathbf{u} dt \right) \nabla \mathbf{u} dt \right\} \\ &\quad \nabla \mathbf{u} + \dots \dots \dots \quad (2.166)\end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{a}$  は Lagrange 座標において  $t=0$  での位置を示すベクトルである。したがって、上式に前述した第3次近似解を代入して  $\lambda^3$  までの表示を得れば、次式ようになる。

$$\frac{U}{\sqrt{gh}} = \frac{u}{\sqrt{gh}} - \frac{2}{k^2} \lambda^2 \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left\{ \left( \frac{E}{K} \right) (\vartheta - \vartheta_0) \right.$$

$$\left. -E(\vartheta) + E(\vartheta_0) \right\} \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta$$

$$+ \frac{3}{2k^4} \lambda^3 \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left[ 2(2k^2 - 1) \left\{ \left( \frac{E}{K} \right) (\vartheta - \vartheta_0) - E(\vartheta) + E(\vartheta_0) \right\} \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta \right.$$

$$+ k^2 \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta (\text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta - \text{cn} \vartheta_0 \text{sn} \vartheta_0 \text{dn} \vartheta_0) - 6k^2 \left\{ \left( \frac{E}{K} \right) (\vartheta - \vartheta_0) - E(\vartheta) + E(\vartheta_0) \right\}$$

$$\text{cn}^3 \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta + (\text{cn}^2 \vartheta - \text{cn}^2 \vartheta_0) \{ 3k^4 \text{cn}^4 \vartheta - 2k^2 (2k^2 - 1) \text{cn}^2 \vartheta + k^2 (k^2 - 1) \} \left. \right]$$

$$- \frac{\lambda^3}{k^4} \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left[ 6 \left\{ 2 \left( \frac{E}{K} \right) - 1 \right\} \{ E(\vartheta) - E(\vartheta_0) \} \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta - \left\{ 9 \left( \frac{E}{K} \right)^2 - 2 \left( \frac{E}{K} \right) (k^2 + 1) + k^2 - 1 \right\} \right.$$

$$\left. (\vartheta - \vartheta_0) \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta + 6k^2 \{ E(\vartheta) - E(\vartheta_0) - \left( \frac{E}{K} \right) (\vartheta - \vartheta_0) \} \text{cn}^3 \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta \right]$$

$$- \frac{\lambda^3}{k^4} \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-2} \{ E(\vartheta) - E(\vartheta_0) - \left( \frac{E}{K} \right) (\vartheta - \vartheta_0) \}^2 \{ 3k^2 \text{cn}^4 \vartheta - 2(2k^2 - 1) \text{cn}^2 \vartheta + k^2 - 1 \}$$

$$\dots \dots \dots (2.167)$$

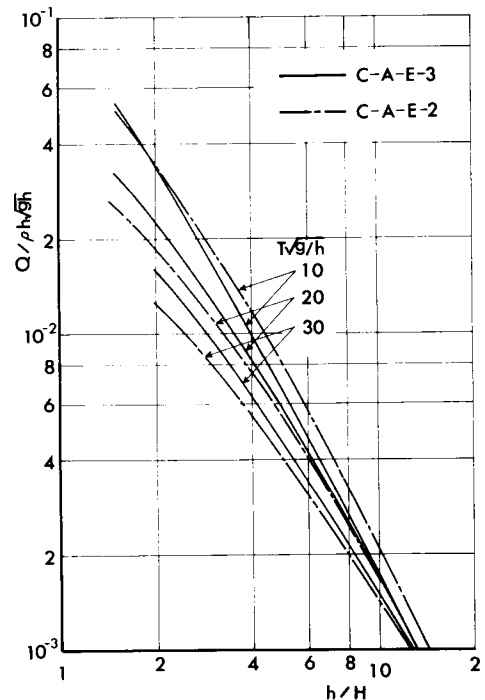


図-2.12 クノイド波の質量流束の特性

$$\begin{aligned}
\frac{W}{\sqrt{gh}} &= \frac{w}{\sqrt{gh}} - \frac{1}{k^3} (3\lambda^5)^{1/2} \left(\frac{c}{\sqrt{gh}}\right)^{-1} \left(\frac{z}{h}\right) \{E(\vartheta) - E(\vartheta_0) - \left(\frac{E}{K}\right)(\vartheta - \vartheta_0)\} \{3k^2 \text{cn}^4 - (4k^2 - 2)\text{cn}^2 - 1\} \\
&\quad - \frac{1}{k} (3\lambda^5)^{1/2} \left(\frac{c}{\sqrt{gh}}\right)^{-1} \left(\frac{z}{h}\right) \{\text{cn}^2 \vartheta_0 - \text{cn}^2 \vartheta\} \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta - \frac{2}{k^3} (3\lambda^7)^{1/2} \left(\frac{c}{\sqrt{gh}}\right)^{-2} \left(\frac{z}{h}\right) \{3k^2 \text{cn}^4 \vartheta \\
&\quad - 2(2k^2 - 1)\text{cn}^2 \vartheta - 1\} \left[\frac{1}{2} \left\{\left(\frac{E}{K}\right)(\vartheta - \vartheta_0) + E(\vartheta_0) - E(\vartheta)\right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{1}{6k^4} \{3k^2 \left(\frac{E}{K}\right) + 6k^4 - 14k^2 + 4\} \right. \\
&\quad \left. \{E(\vartheta_0) - E(\vartheta)\} + \frac{1}{6k^4} \{3k^2(k^2 - 1)\left(\frac{E}{K}\right) + 6k^6 - 19k^4 + 17k^2 - 4\}(\vartheta_0 - \vartheta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6k^2} (\text{cn} \vartheta_0 \text{sn} \vartheta_0 \text{dn} \vartheta_0 - \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta) \right] - \frac{1}{k^3} (3\lambda^7)^{1/2} \left(\frac{c}{\sqrt{gh}}\right)^{-1} \left(\frac{z}{h}\right) \left\{\left(\frac{E}{K}\right)(\vartheta - \vartheta_0) + E(\vartheta_0) \right. \\
&\quad \left. - E(\vartheta)\right\} \{3k^2 \text{cn}^2 \vartheta - 2k^2 + 1\} \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta \quad \dots\dots\dots (2.168)
\end{aligned}$$

ここに、 $\vartheta_0$  は  $\vartheta|_{t=0}$  および  $E(\vartheta)$  は Jacobi の E 関数である。

ところで、式 (2.166) の変換が十分な精度を持つためには、 $|\int_0^t \mathbf{u} dt|$  が時間  $t$  に関係なく十分に小さいことが必要である。そこで、通常の展開における近似法と計算機による厳密計算の 2 通りの計算を行い、 $\mathbf{U}(\mathbf{a}, t)$  を  $\mathbf{u}(\mathbf{a}, t)$  で展開して近似的に計算する前者の妥当性についても検討して、クノイド波の水粒子の軌跡を調べる。

展開による近似法：

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{a} + \int_0^t [\mathbf{u}(\mathbf{a}, t) + \{\int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{a}, t) dt\} \nabla \mathbf{u} \\
&\quad + \frac{1}{2} \{\int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{a}, t) dt\}^2 \nabla^2 \mathbf{u} + \{\int_0^t (\int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{a}, t) dt) \nabla \mathbf{u} dt\} \nabla \mathbf{u}] dt \quad \dots\dots (2.169)
\end{aligned}$$

計算機による方法： $|\int_0^t \mathbf{u} dt|$  は、1 周期の間必ずしも十分小さくはないとして、1 周期  $T$  を  $N$  個に分割し、 $T/N$  ごとの積分計算を行い、各 step ごとに定まる水粒子位置を  $\mathbf{a}$  とし、そこでの水粒子速度を用いてつぎの step の計算を行う

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \sum_{m=0}^n \mathbf{r}_m = \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{r}_m + \int_0^{tn-tn-1} [\mathbf{u}(\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{r}_m, t) + \{\int_0^{tn-tn-1} \nabla \mathbf{u}(\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{r}_m, t) dt\} \\
&\quad \nabla \mathbf{u}(\sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{r}_m, t)] dt \quad \dots\dots\dots (2.170)
\end{aligned}$$

まず、 $\lambda$  を展開パラメータとした第 2 次近似解を用いた式 (2.169) および (2.170) の計算結果を図 - 2.13 に示す。ここで、実線は式 (2.169) によるものであり、また 1 点鎖線は式 (2.170) による結果を示す。厳密計算における分割数に関しては、 $N=10$  と  $N=20$  の場合でその相違はたかだか約 1% であることから、その結果の精度は十分であると考えてよい。式 (2.169) および (2.170) の相違は Skjeltbreia<sup>5)</sup> が行ったものより若干大きくなっており、Lagrange 座標で質量輸送を計算する場合の計算上の問題点が理解されるであろう。また、 $T\sqrt{g/h}$  および  $H/h$  の増大とともに水粒子の軌跡がかなり偏平になり、上下非対称になってくる。このことはクノイド波の特性からも理解される。さらに、底部に近づく

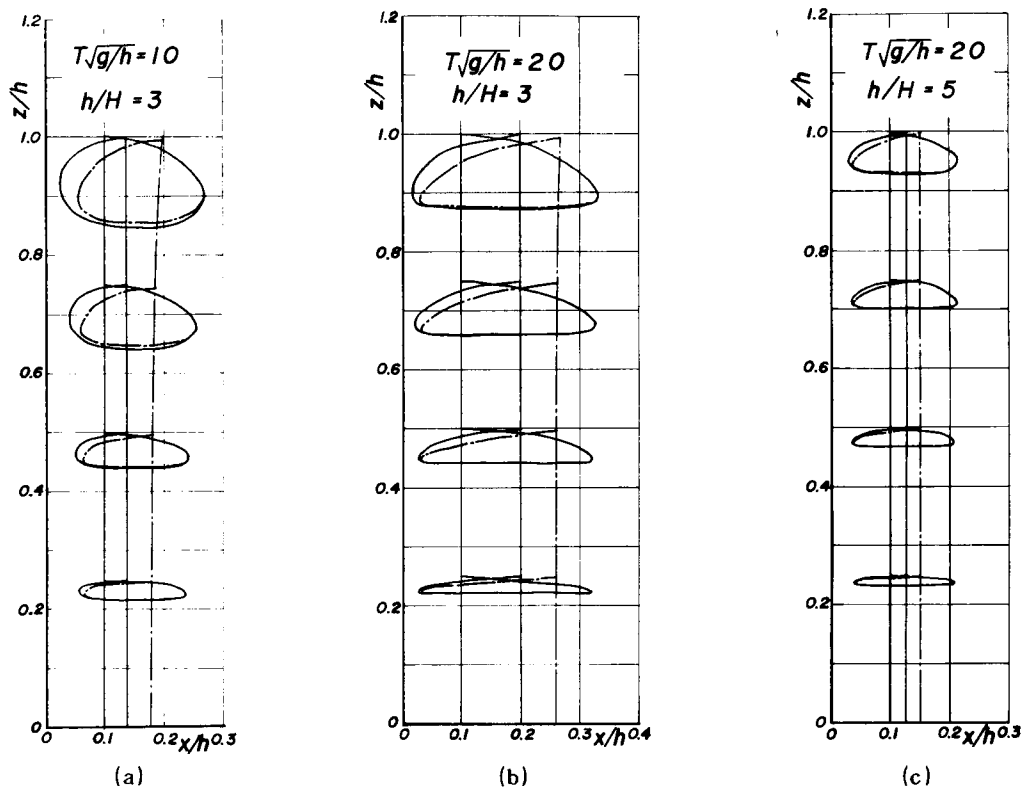


図-2.13 クノイド波の水粒子の軌跡

につれて、その軌跡が扁平になるのに対し、第2次近似解を用いているため、軌跡の水平長の変化はほとんど現われておらず、軌跡の高さだけが鉛直方向に変化することがわかる。

つぎに、Lagrange 座標による通常の質量輸送速度  $U_m$  は、

$$U_m = \frac{1}{T} \int_0^T U dt \quad \dots\dots\dots (2.171)$$

で定義されるので、式 (2.167) を代入して次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{U_m}{\sqrt{gh}} = & \frac{\lambda^2}{6k^4} \left\{ 1 + 2 \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{20k^6} \left[ 35 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} + \left( \frac{E}{K} \right) (6k^4 - 41k^2 + 41) - 3(k^4 - 3k^2 + 2) \right] \\ & + \frac{2\lambda^3}{5k^6} \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \left\{ 2 \left( \frac{E}{K} \right) (k^4 - k^2 + 1) - k^4 + 3k^2 - 2 \right\} \\ & + \frac{\lambda^3}{10k^6} \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left[ 5 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 9 \left( \frac{E}{K} \right) + 10k^2 - 17 \right\} + \left( \frac{E}{K} \right) (12k^4 - 57k^2 + 47) - 6k^4 + 13k^2 - 7 \right] \\ & + \frac{\lambda^3}{15k^6} \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-2} \left[ 15 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ \left( \frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} + \left( \frac{E}{K} \right) (4k^4 - 19k^2 + 19) - 2k^4 + 6k^2 - 4 \right] \dots (2.172) \end{aligned}$$

この表示によれば、Lagrange 座標における質量輸送速度の鉛直分布は、第2次近似解すなわち $O(\lambda^2)$ までの計算では一様であるが、第3次近似解ではその鉛直分布が現われることがわかる。図-2.14は上式による無次元質量輸送速度 $U_m/\sqrt{gh}$ の鉛直分布を $T\sqrt{g/h}$ および $h/H$ との関係で示したものであり、図中の記号は図-2.3と同じである。

これから、第3次近似解による結果に図-2.6に示した水平水粒子速度の鉛直分布に対応した分布が生じることがわかるとともに、 $T\sqrt{g/h} \geq 20$ の範囲では平均水面下での鉛直分布はほぼ一様となり、第3次近似解による結果と第2次近似解による結果との相違はなくなってくることがわかる。また、同図には、式(2.163)および(2.164)にそれぞれ示した質量流束 $Q_1$ および $Q_2$ の第3次近似解による結果を示してある。この結果、新しいクノイド波理論においては、Euler 座標およびLagrange 座標での質量輸送がその鉛直分布に関して基本的に対応しており、従来の有限振幅波理論におけるような用いる座標系に応じて質量輸送の鉛直分布が相違するという問題は生じないことがわかる。

#### e) 極限波高

クノイド波の極限波高は、Laitone<sup>20)</sup>によってすでに示されているが、ここでは、Rankine-Stokesの極限波高の条件<sup>2),24)</sup>を用いて、新しいク

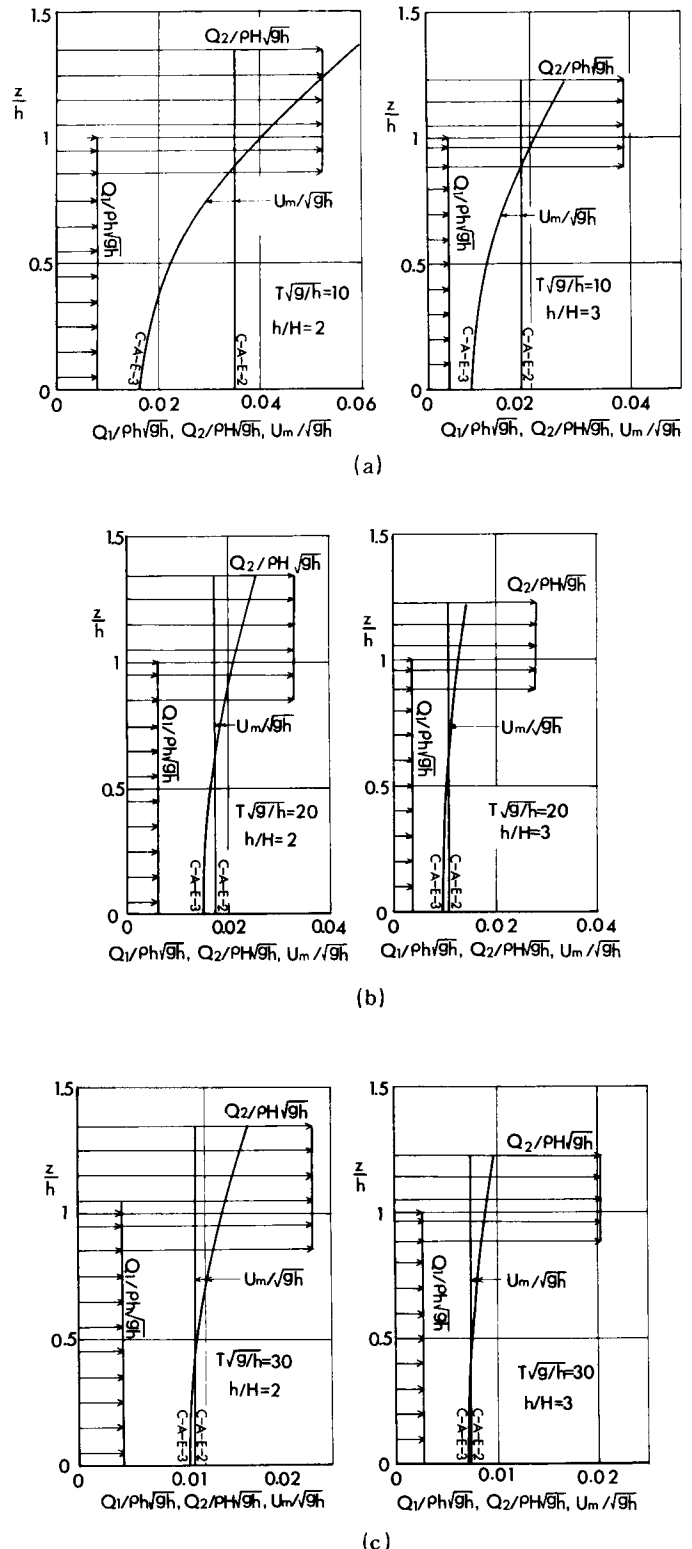


図-2.14 Lagrange 座標における質量輸送速度の鉛直分布

ノイド波の極限波高を求める。 $\lambda$ を展開パラメータとするせつ動解の第2次近似解を用いることにすれば、上述の条件に式(2.76), (2.79) および(2.80)を代入することにより、 $\lambda$ に関する6次式が得られる。これを母数 $k$ に対する条件式(2.74)と連立させて解き、得られた $\lambda$ および $k$ を次式に代入すれば、求める極限波高 $H_{max}/h$ が得られる。

$$\frac{H_{max}}{h} = \lambda - \frac{\lambda^2}{4k^2} \left\{ 12 \left( \frac{E}{K} \right) + 5k^2 - 10 \right\} \dots\dots\dots (2.173)$$

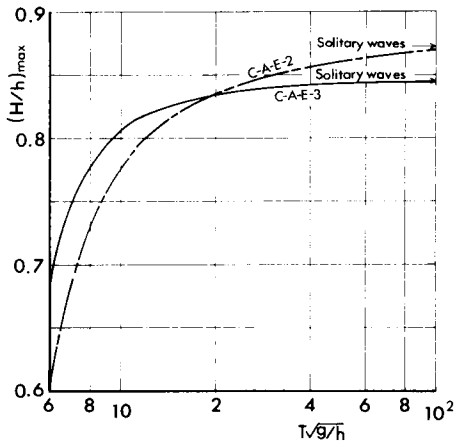


図-2.15 Rankine-Stokes の極限波高の条件によるクノイド波の極限波高

図-2.15はこれらの式の誤差を $10^{-10}$ 以下に抑えて解いた結果を示したもので、図中の記号は図-2.3と同じである。さらに第3次近似解を用いる場合には上述の条件式は $\lambda$ の15次式となるが、この場合に対しても同様に計算して求めた $\lambda$ および $k$ を次式に代入すればよい。

$$\begin{aligned} \left( \frac{H}{h} \right)_{max} = & \lambda - \frac{\lambda^2}{4k^2} \left\{ 12 \left( \frac{E}{K} \right) + 5k^2 - 10 \right\} + \frac{\lambda^3}{8k^4} \left[ \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 83 \left( \frac{E}{K} \right) + 76k^2 - 136 \right\} \right. \\ & \left. + 13k^4 - 56k^2 + 56 \right] \dots\dots\dots (2.174) \end{aligned}$$

この結果についても同様に図-2.15に示した。これから、従来 spilling breaker の砕波指票として用いられてきた Laitone のクノイド波理論による  $H_{max}/h = 8/11$  は若干小さい値であったことがわかる。また、この場合の近似解の収束性は、 $T\sqrt{g/h} = 2.0$  付近において最もよく、そこから  $T\sqrt{g/h}$  が減少あるいは増大するに従って、若干不十分となるが、全体的にはば良好であると言えよう。さらに、第3次近似解における  $T\sqrt{g/h}$  が無限大となる極限での  $H_{max}/h$  は 0.846 で、これは Byatt-Smith によって与えられた 0.86 や Lenau<sup>24)</sup> および Yamada による 0.83 の中間の値を示している。このことは、Byatt-Smith が solitary wave の  $H_{max}/h$  が 0.86 と 0.83 の間に存在するだろうと述べていることと対応し、せつ動解の信頼性が砕波限界付近においてもきわめて高いことを示すものと考えられる。

### 第3節 新しいクノイド波理論の適用性

ここでは、概説において述べた定形波の実験に関する2つの必須条件を同時に満足する新しい波浪水槽を試作し、これを用いて有限振幅波の波速および質量輸送速度に関する実験を行って、第2節で誘導した新しいクノイド波理論の適用性を検討する。

#### (1) 新波浪水槽

##### a) 波浪水槽および造波機の改良

##### i) 波浪水槽の条件

概説において述べたように、有限振幅波理論の適用性を実験的に検証する場合には、波形のみならず、波によって生じる質量輸送の一様性および定常性を確保することが必須となる。

水深が浅くなると、従来のような正弦運動による造波機によって造波される波は、正弦波としてその波形を維持することができず、soliton に分裂しながら安定な波に変形していく<sup>(25),26)</sup>。そこで、波形の一様性を確保するため、実用上造波すべき波の水粒子速度に対応した運動を造波板に与えるように、造波機の改造を行えば、ある程度理想的なクノイド波の発生を試みることができであろう。これと同時に、理想的な波浪水槽にかような波を発生させると、造波側は波の発生点となり、したがって波に伴う質量輸送の吹き出し (source) となり、また水槽端部の消波側では波を消波させるべきことになるので、その質量輸送の吸い込み (sink) となって、定常な波形と質量輸送の場が形成されることになる。ところが、従来用いられてきた波浪水槽はその両端が閉じられているため、前述した吹き出しでは水の補給が行われないうで、水位低下を生じ、吸い込みでは水位上昇を起して、水槽内に水面勾配が形成されることになる。その結果、波の進行方向と逆向きのもどり流れが水槽内に発生し、1つの循環流が形成され、このために波によって生じる本来の質量輸送のみならず、波速や水粒子速度までもが影響を受けると考えられる。この点を明らかにするには、上述のような水槽端部の拘束のある場合および拘束のない場合について実験を行い、両者を比較する必要がある。そこで、図-2.16 に示すような二重床構造を持つ波浪水槽を試作し、同一の波の条件下で水槽端部の条件のみを変化させて実験を行うことにした。用いた水槽の概略は、以下のとおりである。すなわち、造波板より23.2 mの位置にこう配1/40のスリット状の質量輸送の補給口

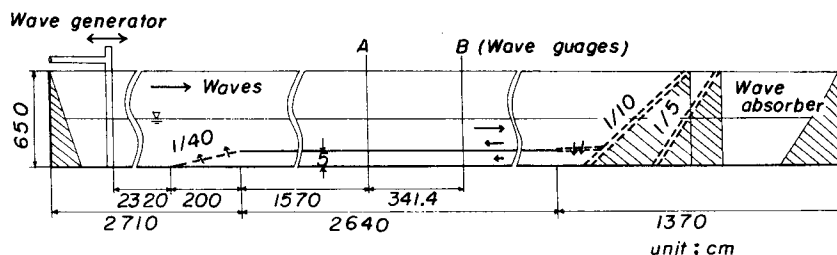


図-2.16 二重床水槽の概略図



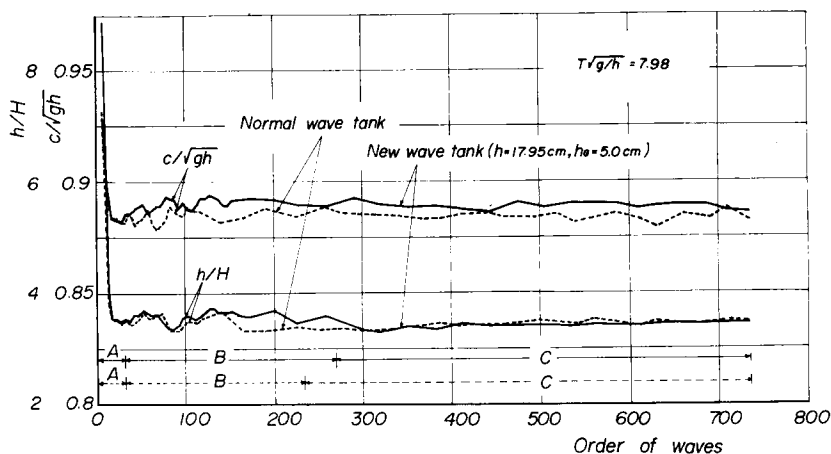


図-2.17 水槽端部の条件を考慮した場合の波速および波高の時間的变化

が設けられ、これより 2.64 m の区間は二重床とし、上部は  $60 \times 50$  cm の断面を持つ進行波用の波水路部および下部は  $5 \times 50$  cm の断面を持つ質量輸送に伴うもどり流れ用暗きょ部となっており、その端部は開口して波水路部から暗きょ部への波の質量輸送による水の補給が円滑になされるようになっている。また、反射波の発生をできるだけ少なくするため、パンチドメ

タル板を多数用いた消波装置を用いたが、その場合 Healy の方法で求めた反射率はほとんど無視できる程度とすることができた。実験方法は、2 台の容量型波高計を 3 m 以上の間隔で配置して、波の同時記録から波速を測定し、また多数の中立粒子を 16mm 撮影機で撮影して質量輸送速度の測定を行った。

図-2.17 は、無次元周期  $T\sqrt{g/h} = 7.98$ 、水深  $h = 17.95$  cm およびもどり流れ用暗きょの高さ  $h_g = 5.0$  cm の場合で、もどり流れ用暗きょ口を開口にして端部による拘束をなくした場合および暗きょ口を閉じて従来の端部による拘束のある水槽とした場合について測定された波高および波速の時間的变化を示した

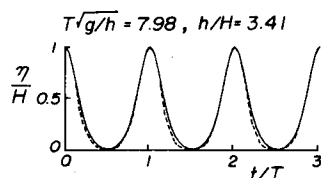
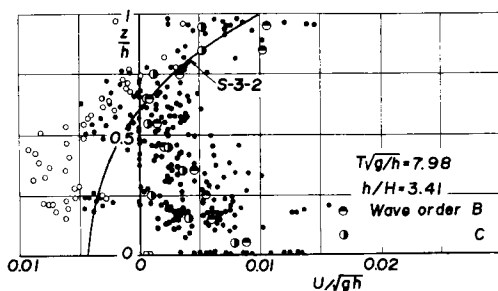
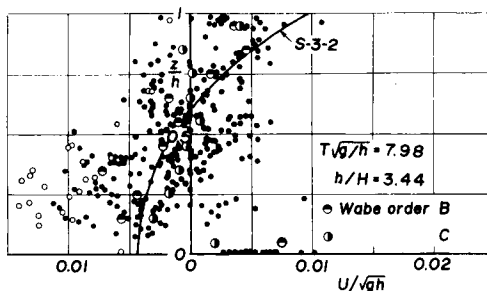


図-2.18 定常状態における波形の比較



(a)



(b)

図-2.19 質量輸送速度の鉛直分布

ものである。図中の実線は、前者の暗き口を開口にした場合であり、また、破線は後者の通常の波浪水槽の場合の結果を示す。また、図中のA、BおよびCの区分は、時間経過による波の定常性の程度による区分で、Aは先行波を含む水槽内部の初期変動の大きな領域、Bは定常状態への遷移過程およびCはほぼ定常状態と考えられる領域である。これより、造波開始200～300波後で定常状態となり、このとき、両者の波高はほぼ一致しているにもかかわらず、波速に関しては実線で示した開口にした場合の結果の方が、全体的に2%程度以上も大きくなっていることがわかる。この相違は、明らかにもどり流れの影響によるものと考えられ、水槽端部の条件に波速の絶対値が依存することを示すものと言える。なお、波形については、定常状態での実験波形と理論波形との比較を示す図-2.18より明らかなように、両者の対応は良好であり、Cの段階では波形の一樣性および定常性が確保されていることがわかる。図-2.19(a)および(b)は、それぞれ図-2.17の実線および破線で示される条件に対応した質量輸送速度の鉛直分布を示したものである。図中、小さい白円は先行波を含む領域Aでの実験値であり、黒円はそれ以後の実験値を示す。また、大きい半黒円は後者の各層ごとの平均値を示す。ただし、A、BおよびCの時間区分は図-2.17に示したものに对应している。なお、図中のS-3-2で示される理論曲線は、次式に示される波速の第2定義によるStokes波理論の第3次近似解によるものである。

$$\frac{U_m}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{8} \left( \frac{2\pi H^2}{L} \right) \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right) \left\{ \frac{\cosh 4\pi(h+z)/L}{\sinh^2 2\pi h/L} - \frac{\coth 2\pi h/L}{2\pi h/L} \right\} \dots\dots\dots (2.175)$$

これから、実験値は全体的に非常に散乱しているが、領域Aにおいては、いずれの場合も孤立波性の先行波の通過後に生じる強いもどり流れの影響が現れており、初期の段階では質量輸送は端部の条件にあまり影響されないことがわかる。しかしながら、暗き口を開口にした場合では、Bの段階になると波の進行方向の質量輸送が存在するようになり、Cの段階ではこの傾向が一層顕著になり、全断面にわたって質量輸送の存在が明確になる。なお、実験結果のオーダーがかなり小さくなっている点については、もどり流れの影響がある程度波水路部にも及んでいる結果と考えられ、質量輸送の連続条件からこの影響を補正してみると、実際の質量輸送は図-2.19に示される測定値の約6倍程度になり、第2節で述べたように波速の数%程度のオーダーであることがわかる。一方、図-2.19(b)の暗き口を閉じた場合では、BおよびCの段階においても波の進行方向と逆向きの質量輸送成分が存在し、その鉛直分布もBの段階では図中の質量流束をゼロと仮定した理論曲線に对应しているが、Cの段階には過度の拡散に伴ってRussellら<sup>27)</sup>の実験結果に对应したものになってくることがわかる。これら両者の場合の著しい相違は、波速の場合にも見られたように、明らかに水槽端部による拘束によって生じたもどり流れによるもので、波自体による質量輸送は全断面にわたって波の進行方向に輸送されるものと考えられる。以上の結果から、定形進行波に関する実験を行う場合、水槽端部の拘束に伴うもどり流れの影響を除去して波形および波速のみならず質量輸送についても一樣性および定常性を確保することがきわめて重要であることが理解されよう。したがって、このような循環流の発生を防ぎ、質量輸送の一樣性を確保するためには、質量輸送に対する水槽端部の拘束を除去した波浪水槽が必要となる。

## ii) 波浪水槽の改良

まず、ピストン方式の造波機を用いることにしたため、造波機の前後に波が発生して、その付近の水位低下が著しいので、波が一方方向のみに発生するように図-2.20に示すような消波フロートを造波板の後面に取り付けた。この結果、後面に発生する波の波高を取り付け前の約 $1/5$ 程度に減少させることができた。つぎに、前述した吹き出しおよび吸い込みに対して全く自由な条件を与えるために図-2.21および写真-2.1に示すような大水面積を持つ直径約3.5mの扇形波浪平面水槽内に、水槽端部を閉じない幅0.5m、高さ0.65mおよび長さ3.3mの波浪水槽を設置することにした。この結果、吹き出しへの水の補給は、この外部水槽から行われるので、このために水槽両端での水位差が存在するはずであるが、平面水槽は十分な水面積を持っているため、この水位差は完全に無視されるものであると考えられた。さらに、外部水槽から造波機部の吹き出しへの水の補給に対しては、波による周期的な水位変動にかかわらず、質量輸送に対応して一様に補給されるように、図-2.22に示すような改造を行った。一方、波浪水槽の消波側と外部水槽との連結部での境界条件の変化によって生じる反射波を除去するために、図-2.23に示すような特殊な消波装置を考案し、これを水槽端に取り付けた。これらの配慮によって、ほとんど無反射状態で消波することができ、かつ波による一様な質量輸送の場を確保することができた。

## iii) 造波機の改良

造波機の運動をクノイド波理論による水平水粒子速度に一致させて造波することによって、できるだけ

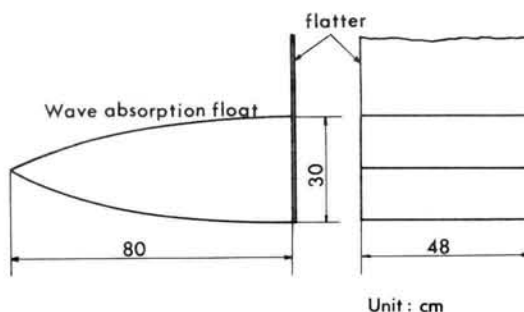


図-2.20 消波フロートの説明図

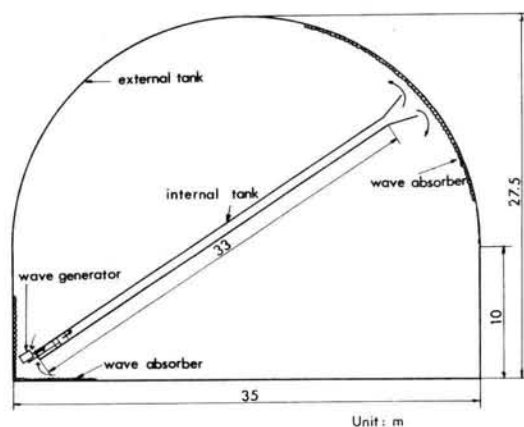


図-2.21 新波浪水槽の平面図

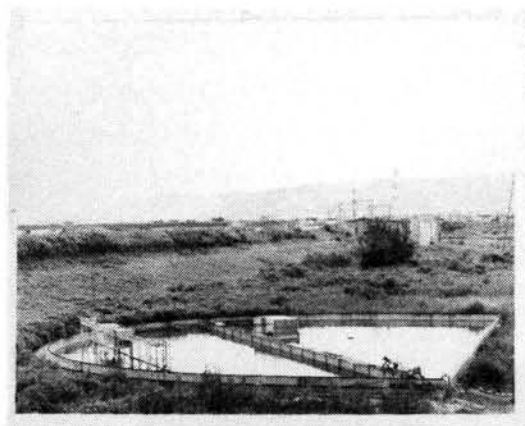


写真-2.1 新波浪水槽の全景

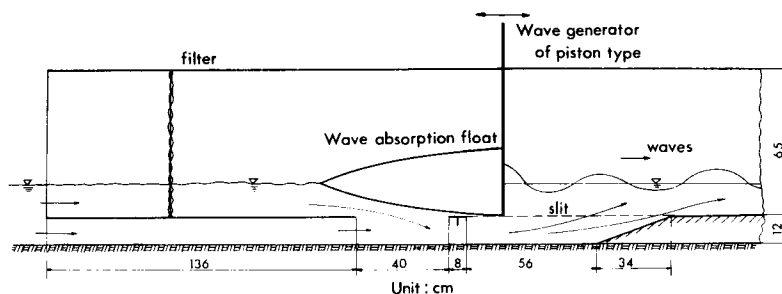


図-2.22 新波浪水槽の造波部の詳細図

速かに所定の定形波を作るように心がけた。すなわち、第1次近似のクノイド波理論で考えると、水平水粒子速度は次式で表される。

$$\sqrt{\frac{u}{gh}} = \frac{H}{h} \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} \dots \dots \dots (2.176)$$

そして、 $x = 0$  の点での造波板の変位を  $X(t)$  とし、その速度をクノイド波の水平水粒子速度に一致させることにすれば、一般に次式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= u \Big|_{x=X(t)} \\ &= u \Big|_{x=0} + X \frac{u_x}{x} \Big|_{x=0} + 0.5 X^2 \frac{u_{xx}}{xx} \Big|_{x=0} + \dots \dots \dots (2.177) \end{aligned}$$

しかし、造波板の変位があまり小さくなく、 $x/L \ll 1$  である場合には、次式で実用上近似してもよいであろう。

$$\frac{dX(t)}{dt} = u \Big|_{x=0} \dots \dots \dots (2.178)$$

したがって、造波板の運動に対しては、

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} \left( \frac{dX}{dt} \right) = \left( \frac{H}{h} \right) \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} \dots \dots \dots (2.179)$$

を満足させるように、特殊カムを用いてモーターの様な回転運動を所定の運動に変換することにした。図-2.24 には、造波すべき波の諸量とカム形状の関係を示すが、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに偏平な円形になることがわかる。本実験において実際に製作したカムは、 $T\sqrt{g/h} = 20$  および  $h/H = 2$  の条件のものである。そ

して、このカムによる造波板の運動が、式(2.179)の関係を満足しているかどうかを検証するため、造波板に加速度計を取り付けて、実験値と次式で表されるクノイド波の理論値との比較を行った。

$$\frac{1}{g} \frac{du}{dt} = -2 \left( \frac{H}{h} \right) \operatorname{cn} \vartheta \operatorname{sn} \vartheta \operatorname{dn} \vartheta \cdots \cdots (2.180)$$

その結果、造波板の慣性の効果などはあまり影響しておらず、若干の変動は存在するが、両者は比較的良好に一致することがわかった。

#### b) 計測装置および実験方法

##### i) 計測装置

波の計測には、電気抵抗線式波高計2台と容量型波高計1台を用い、造波機直前40 cmの位置に1台と、さらにそこから約20 m離れた位置に一定間隔で2台設置し、ペン書きレコーダーによって同時記録した。質量輸送の測定については、後述する著者らの理論ではEuler座標における質量輸送速度が求められていることから、Euler座標での質量輸送速度の測定が望ましいが、測定上Lagrange座標での質量輸送速度を測定することにした。このため、直径約0.8 cmのプラスチック球を用いて、フロートとして用いる中立粒子を作成した。質量輸送速度の鉛直分布を測定するため、上述の中立粒子を所定の位置から波動の場に行きできるだけ同時に解放する小さな装置を作った。中立粒子の運動から質量輸送速度を測定するために、モータードライブカメラを使用した。

##### ii) 実験方法

実験は、前述した新波浪水槽で、 $T\sqrt{g/h}$ の値が一定になるように周期と水深を固定して、波高を変化させて行った。波速の測定は、2台の波高計間を進む時間より波速の算出を行ったが、その測定誤差を1%未満とするために、記録紙の読み取り精度が約0.5 mmであることから、紙送り速度を25 mm/sec、波高計の間隔を約2 mとした。さらに、水深の波速に及ぼす影響を少なくするため、水槽底を水平に設置することが要求されたので、波速測定区間およびその前後の水槽底の水準誤差を±0.1 cm以下になるようにした。なお、質量輸送速度の測定は、片面ガラス張りの水槽部に設けられた測定部において、モータードライブカメラを水平に取り付け、その水槽

の側面から、1波ごとの中立粒子の動きを撮影して行い、波形との関係から同位相における中立粒子の移動距離から質量輸送速度を求めることにした。

##### c) 新波浪水槽の特性

前述した定形波を造波するための2つの条件を同時に満足させる1つの試みとして、前述したような新しい波浪水槽を

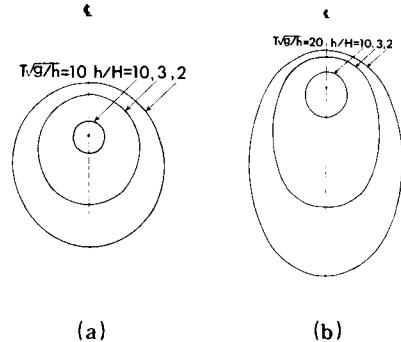


図-2.24 実験に用いたカムの形状と波の特性との関係

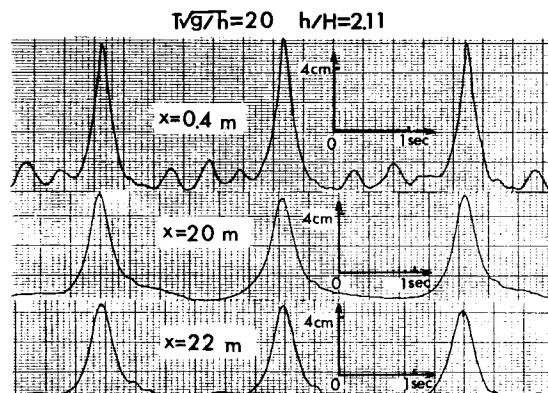


図-2.25 波形の場所的変化

試作したが、この水槽を用いて実験を行うにあたって、まずこれらの条件を満足しているかどうかを確かめておく必要がある。まず、前述の特殊カムを用いた造波機の造波特性について検討する。図-2.25はこのカムを用いて実際に造波させたときの波形の場所的変化を示したものである。これから、造波板の前面ですではほぼ定形波に近い波が発生しており、そこから約20 m および 22 m 離れた2地点での記録を比較して、ほぼ空間的に様な波形が保たれていることがわかるので、前述した波形の空間的一様性は、造波機の改良によって十分確保されたと言ってよいであろう。なお、使用したカムの形状は一定であるため、造波板の振幅および周期を任意に変化させる場合には、その波に対応したカムを用いる必要があるが、ここではカムの形状を一定にして、テコを利用した簡単な振幅拡大装置と無段変速器とによってカムの特性があまり相違しない範囲で、振幅および周期をそれぞれ変化させることにした。したがって、この場合には、もはや式(2.178)の関係を厳密には満足していないが、フィルターの調節などによって、図-2.26に示すように、 $T\sqrt{g/h}=25$  および 30 に対しても定形波とみなすことのできる波を発生させることができた。

つぎに、波形の定常性については、図-2.27に示す初期波から数えて第5波～第7波、第55波～第57波および第105波～第107波のそれぞれの波形の比較から明らかなように、十分その定常性を確保することができたと結論して

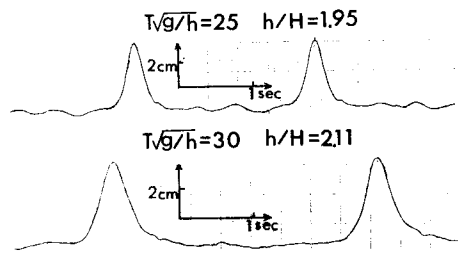


図-2.26 特殊カムによる造波例

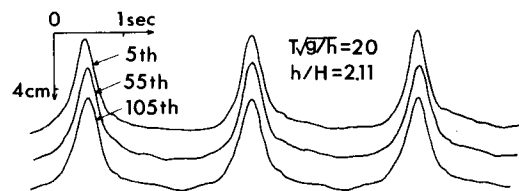


図-2.27 波形の時間的变化

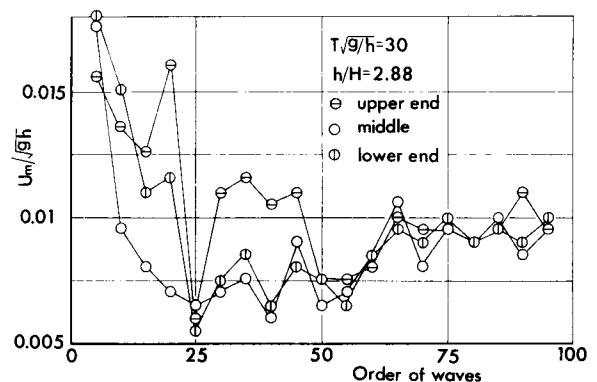


図-2.28 質量輸送速度の空間的および時間的变化

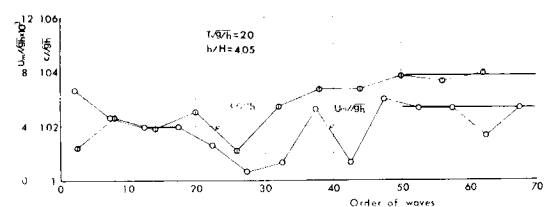


図-2.29 波速および質量輸送速度の時間的变化

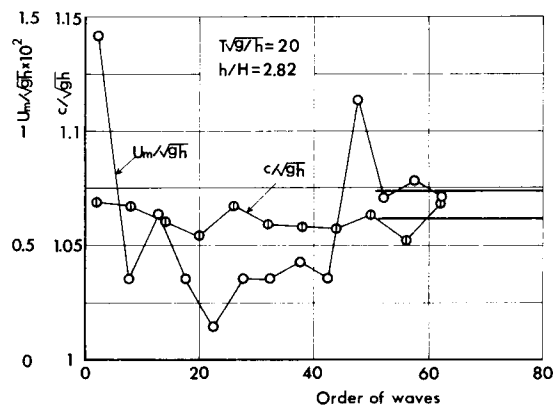
よいであろう。

一方、質量輸送については、造波部付近、水槽中央部および消波部付近の3ヶ所で測定した質量輸送速度の5波による平均値を示す図-2.28の結果から明らかなように、波形の場合ほど明確ではないが、十分定常になった後では、一様性および定常性が保たれていることがわかるであろう。図-2.29は、新波浪水槽における波速の6波についての平均値および質量輸送速度の5波についての平均値の時間的変化を示したものである。これから、すでに示した図-2.28と同様に、質量輸送の時間的変化は、孤立波性の先行波によって最初の5波において最大となり、その後30波位までは減少傾向を示し、それから一定値に収束していき、この傾向は波速についてもいえるようであって、いずれも定常状態になることがわかる。そして、その状態では波形はすでに十分定常になっていることは前述したとおりである。

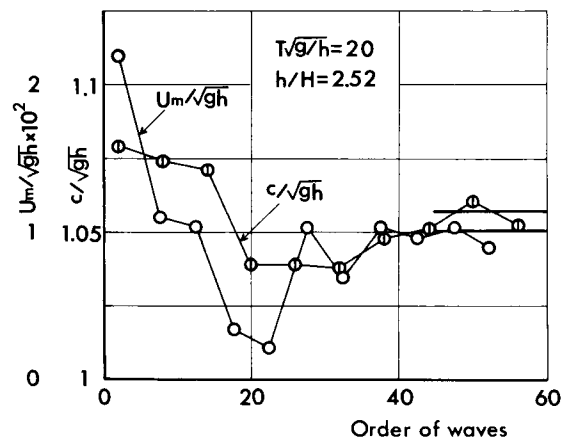
以上の考察から明らかなように、新波浪水槽によれば、造波後ある程度時間が経てば、波形のみならず波速および質量輸送が時間的・空間的に一様な波を造波することができたので、表-2.1に示す実験条件でクノイド波の特性に関する実験を実施することにした。

表-2.1 クノイド波に関する実験の条件

$T \sqrt{g/h}$	周期 $T$ (sec)	水深 $h$ (cm)	波高 $H$ (cm)
2.0	2.27	13.9	3.42 - 3.44
	2.40	14.1	4.59 - 5.16
	2.44	14.6	5.67 - 6.93
2.5	2.91	13.3	5.04 - 7.09
	2.95	13.6	3.62 - 4.50
3.0	3.54	13.6	4.19 - 6.40
	3.50	13.3	4.23 - 5.05



(a)



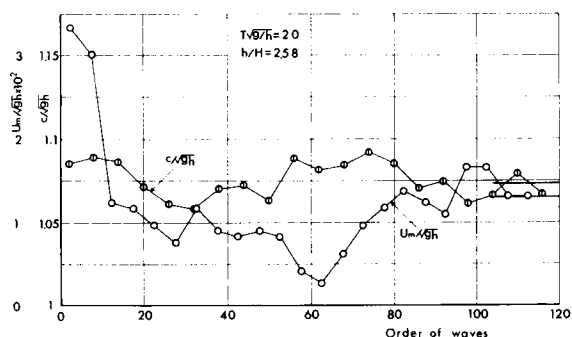
(b)

(2) クノイド波の波形，波速および  
質量輸送に関する理論結果との比  
較

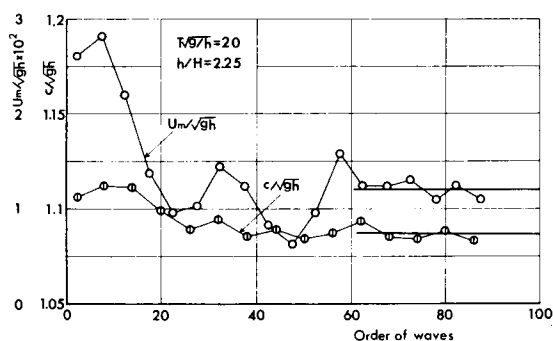
ここでは，前述した実験方法によ  
って新波浪水槽で得られた実験結果を用  
いて，新しいクノイド波理論の適用性  
を考察する。この場合，とくに考慮す  
べきことは，波形および質量輸送速度  
の一樣性と定常性で，かつその波形が  
十分クノイド波理論によるものと対応  
していることである。このうちそれら  
の一樣性に対しては，前述した考察よ  
り造波機から十分離れたところで測定  
された波形および質量輸送速度を用い  
ればよいので，定常性を確認して実験  
結果を用いればよいことになる。図－  
2.30 は前述の図－2.29 と同様に整  
理した波速および質量輸送速度の時間  
的变化を示すが，図中に横線で示すよ  
うな定常状態の値をとって定形波の実験  
値とし，その付近の波形をクノイド波  
の理論波形との比較の対象にすること  
にする。

a) クノイド波の波形

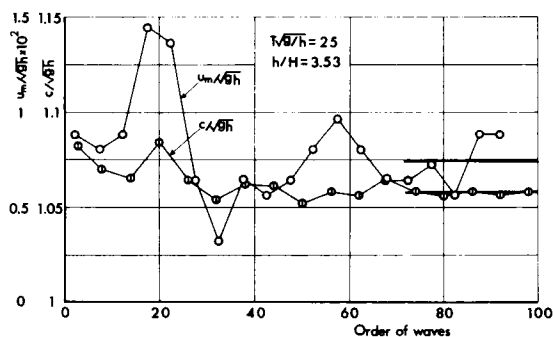
図－2.31 は前述した定常状態にお  
ける波形と著者らのクノイド波理論に  
よるものとの比較を示したもので，図  
中波線および実線はそれぞれ実験およ  
び理論による波形を示している。ただ  
し，Aで示されている波形は，造波機  
から約20m の位置での波形であり，  
Bは約22m の位置でのものである。  
これより，両者の比較は波の峯につい  
てはよく一致しているが，波の谷の部  
分に微小なじょう乱波が存在し，十分



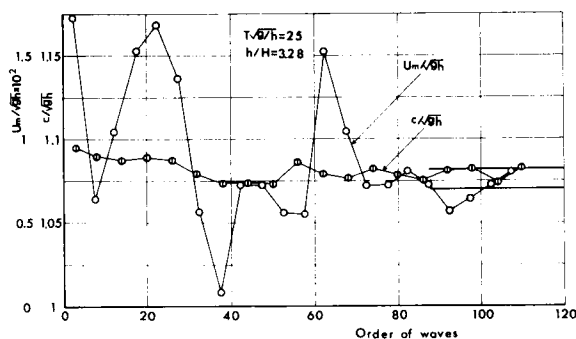
(c)



(d)



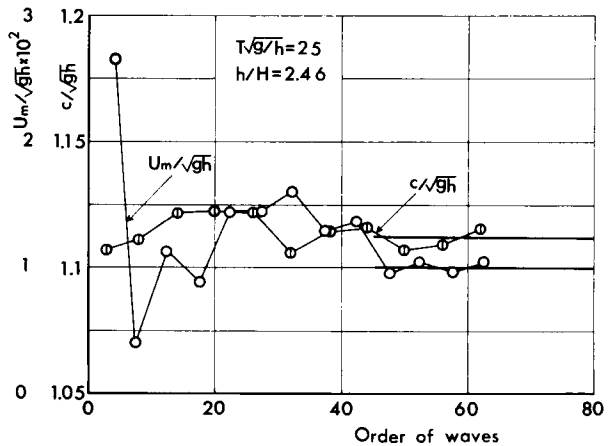
(e)



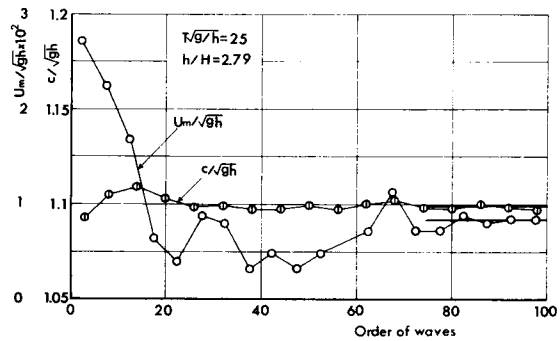
(f)



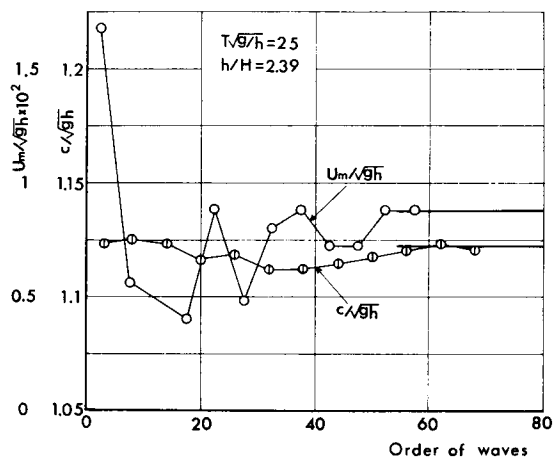
な一致が見られない場合もあることがわかる。このような微小じょう乱は、造波時における水槽内の散乱波が完全に消波されずに残っていることを示すもので、solitonなどの2次波峯と区別されるものと思われる。これらの比較から、前述した波浪水槽によって十分定形波を発生させることができ、その波形はこの実験の範囲内ではクノイド波理論による波形と比較的よく一致することがわかるが、波の谷の部分に存在する微小じょう乱の発生が波速や質量輸送速度に及ぼす影響については後述するつもりである。以上のクノイド波理論による波形と実験結果との比較から、両者の一致がいちおう良好と思われるもので、かつ波速および質量輸送速度が十分定常になっている実験結果から、波速および質量輸送の実験結果と比較すべき諸量を計算して一括表示したものが表-2.2である。



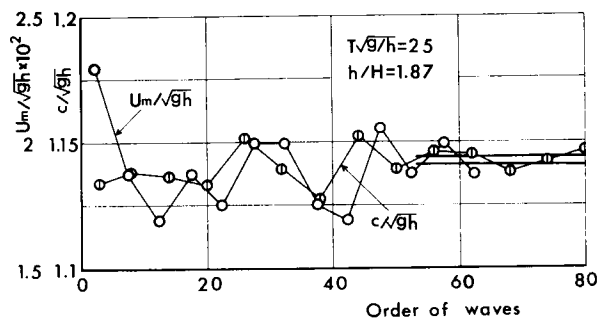
(g)



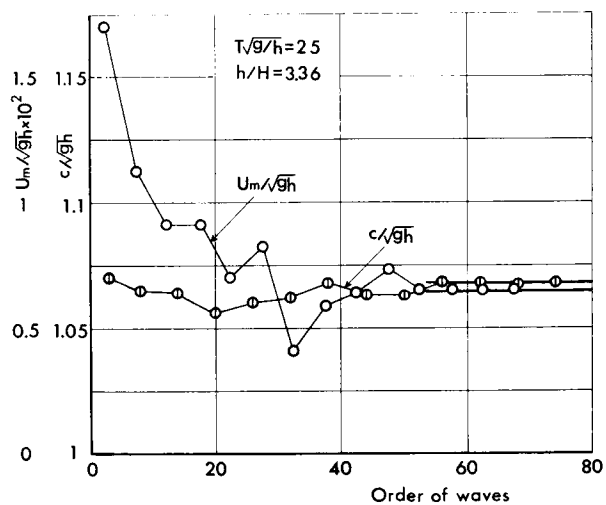
(h)



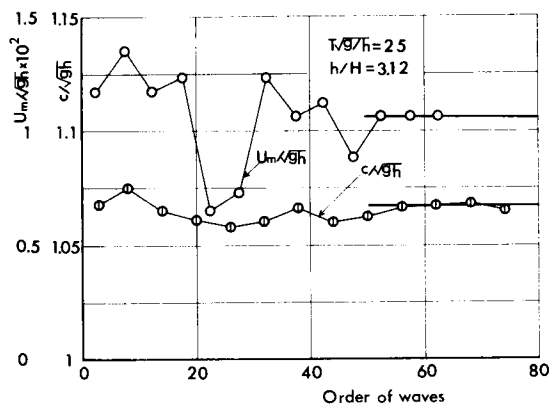
(i)



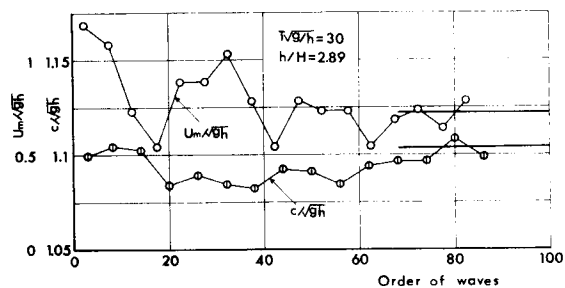
(j)



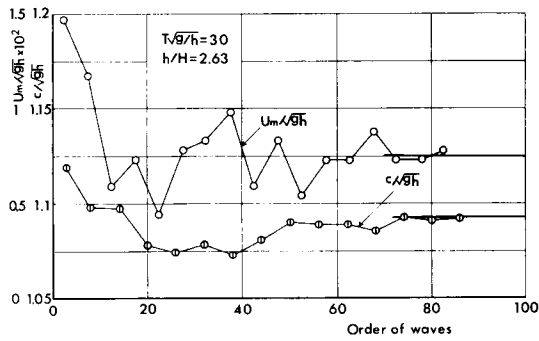
(k)



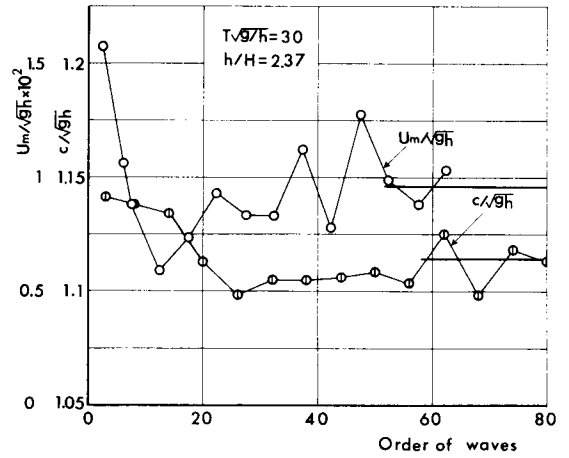
(l)



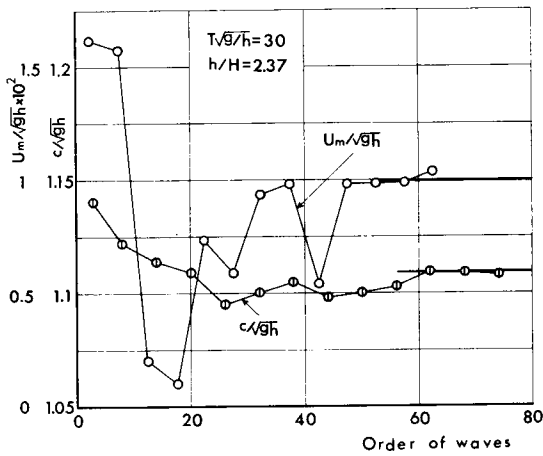
(m)



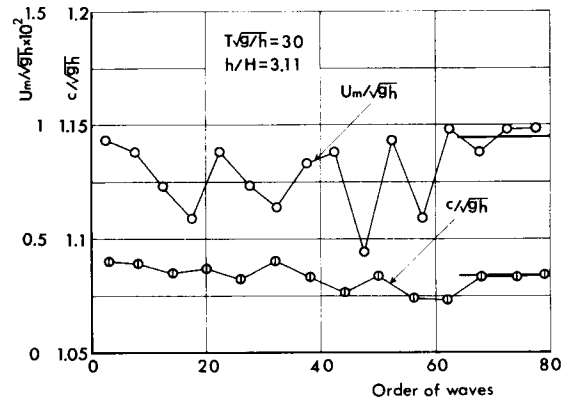
(n)



(o)

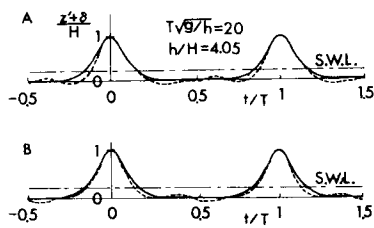


(p)

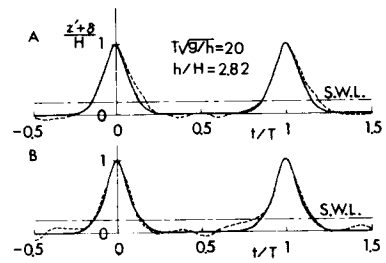


(q)

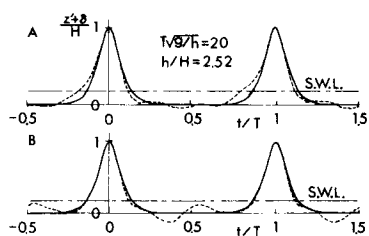
図-2.30 波速および質量輸送速度の時間的变化



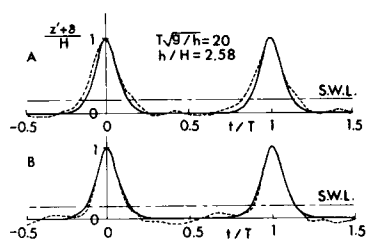
(a)



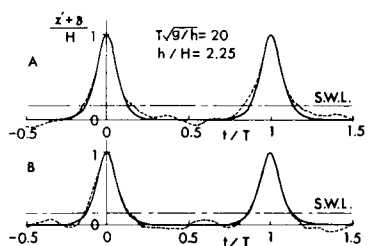
(b)



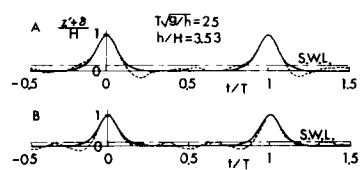
(c)



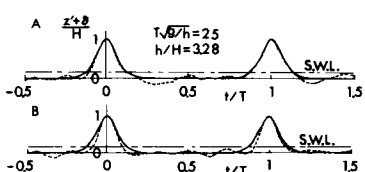
(d)



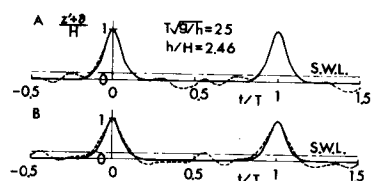
(e)



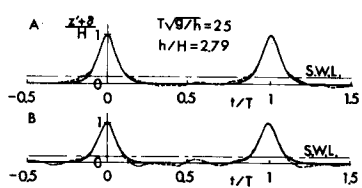
(f)



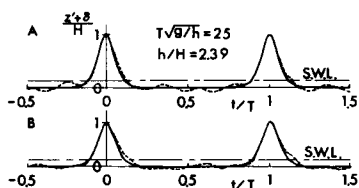
(g)



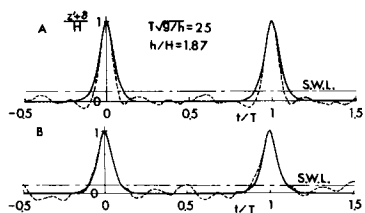
(h)



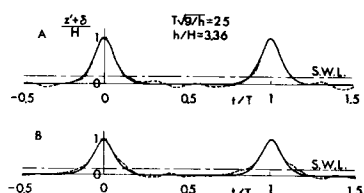
(i)



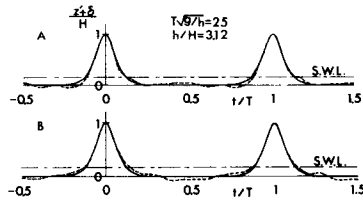
(j)



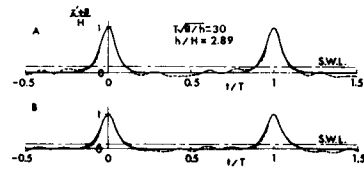
(k)



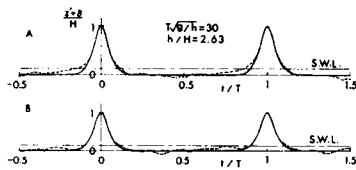
(l)



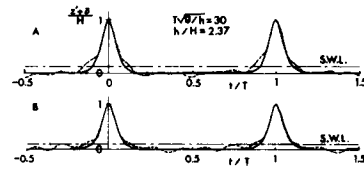
(m)



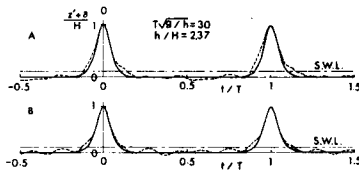
(n)



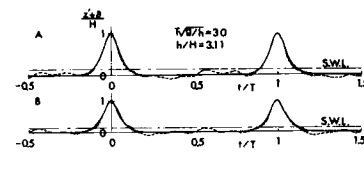
(o)



(p)



(q)



(r)

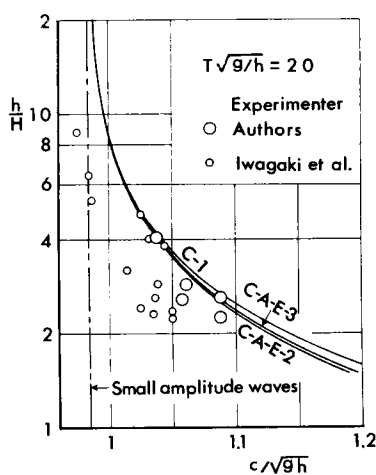
図-2.31 波形の実験結果と理論波形との比較

## b) クノイド波の波速

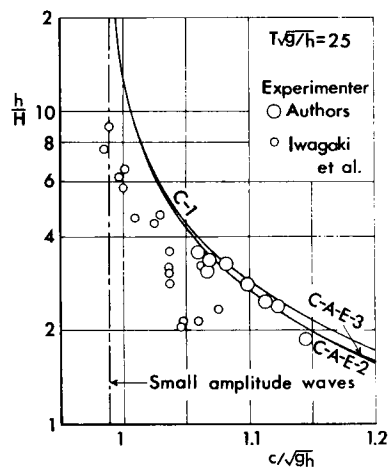
図-2.32 は、表-2.2に示した有限振幅波の波速の実験結果と前述したクノイド波理論による波速との比較を示したものであり、図中のC-1, C-A-E-2 およびC-A-E-3 は、それぞれ第1次、第2次および第3次近似解を示す。これから、著者らの実験結果の範囲が限られていて、しかもその数が少ないという問題もあり、また実験値は若干ばらついているが、全体的には $T\sqrt{g/h} = 20, 25$  および $30$ のいずれの場合についても、波速の実験結果は第3次近似解による理論曲線とよく一致していることがわかる。これらの比較において、実験値が若干ばらついており、理論曲線と離れているものもあるが、これは図-2.30 および図-2.31 から明らかのように、波速の定常性のほか、波形の理論曲線との一致の程度に対応しているように思われる。すなわち、 $T\sqrt{g/h} = 25$  の場合に関しては、かなり波速が定常になっているのに対し、 $T\sqrt{g/h} = 20$  および $30$  の実験値では波速の時間的変動が若干大きくなっており、また波形については、波の谷の部分にじょう乱が現われている場合には、波速の実験値は一般に理論曲線より若干小

表-2.2 波速および質量輸送速度に関する実験結果

$N_o$	$T\sqrt{g/h}$	$h/H$	$c/\sqrt{gh}$	$U_m/\sqrt{gh}$
20-1	20	4.05	1.038	0.0053
20-2	"	2.82	1.061	0.0074
20-3	"	2.52	1.057	0.0101
20-4	"	2.58	1.078	0.0115
20-5	"	2.25	1.087	0.0120
25-1	25	3.53	1.058	0.0074
25-2	"	3.28	1.082	0.0070
25-3	"	2.46	1.112	0.0100
25-4	"	2.79	1.098	0.0084
25-5	"	2.39	1.122	0.0088
25-6	"	1.87	1.144	0.0193
25-7	"	3.36	1.068	0.0065
25-8	"	3.12	1.067	0.0106
30-1	30	2.89	1.104	0.0072
30-2	"	2.63	1.093	0.0075
30-3	"	2.37	1.109	0.0098
30-4	"	2.37	1.114	0.0096
30-5	"	3.11	1.084	0.0095



(a)



(b)

さくなくなることがわかっている。

つぎに、従来の有限振幅波の波速に関する実験結果との比較の一例として、図-2.23中に図示した岩垣らの実験値<sup>12)</sup>との関係について述べればつぎのようである。図-2.32から明らかなように、岩垣らの実験値は一般に著者らのものに比べて若干小さく、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるに従って、実験値と理論曲線との相違が次第に大きくなることがわかる。この事実は、前述したような波浪水槽内における波による二次流の発生によるものと考えられる。

### c) クノイド波の質量輸送

図-2.29は、式(2.174)に示した質量輸送速度の理論結果とここで得られた実験結果との比較を示したものであり、図中の記号は図-2.32と同じである。

これから、測定上の問題もあって実験値のばらつきはかなり大きく、そのオーダーに若干の相違のあるものも見られるが、全般的に両者はかなり対応しており、新波浪水槽による実験結果は、従来の端部のある水槽で行われた Russellら<sup>27)</sup>の結果と大きく相違するものであることがわかる。このように、進行波の質量輸送は、全断面にわたってほぼ一様に波の進行方向に生じ、新しいクノイド波理論による結果とほぼ対応するものであることが明らかとなっている。

図-2.34は、断面平均の質量輸送速度の実験値と理論曲線とを  $T\sqrt{g/h}$  をパラメータとして  $h/H$  との関係で示したものである。図中の記号は図-2.32と同じであるが、C-A-2で示される曲線は、展開パラメータ  $\lambda$  を有理化することによって  $H/h$  を展開パラメータとする近似解に書き換えたもので、次式で表される第2次近似解によるものを示す。

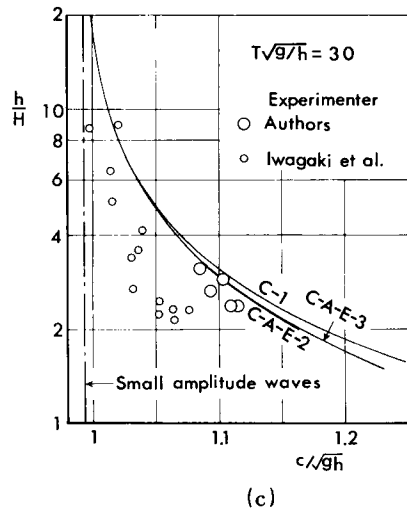


図-2.32 波速の実験結果と理論曲線の比較

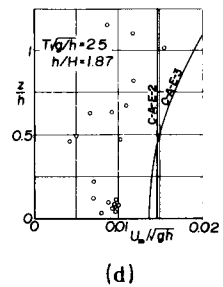
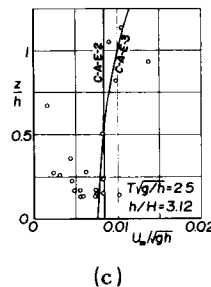
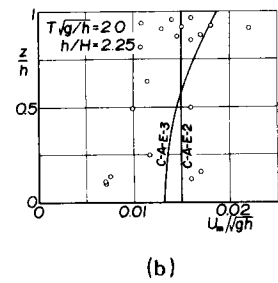
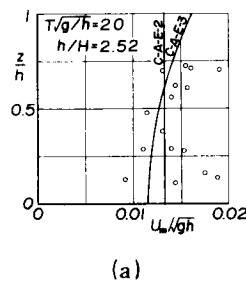
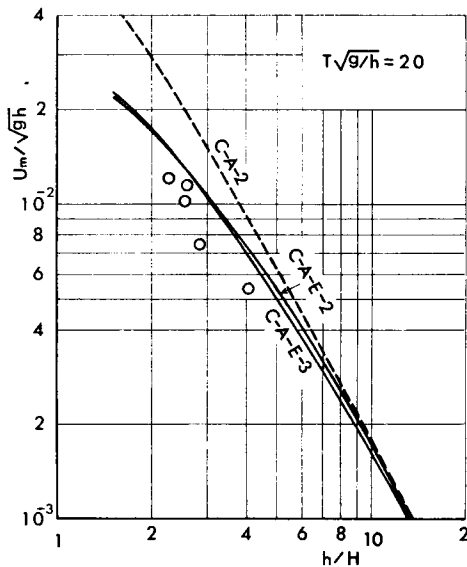
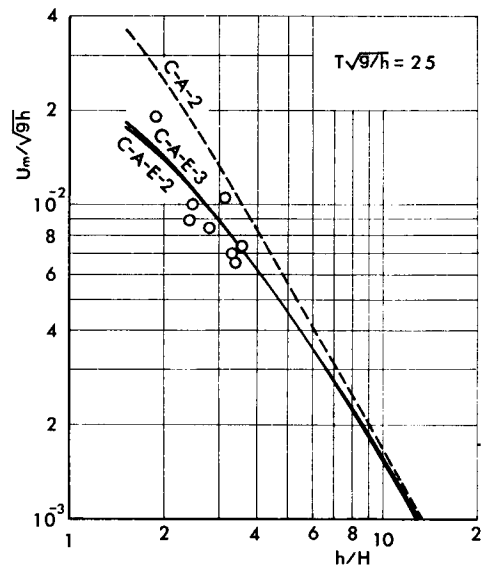


図-2.33 質量輸送速度の鉛直分布の実験結果と理論結果との比較

$$\frac{U_m}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{6k^4} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left\{ 1 + 2 \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \right\} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] \quad \dots\dots\dots (2.181)$$



(a)

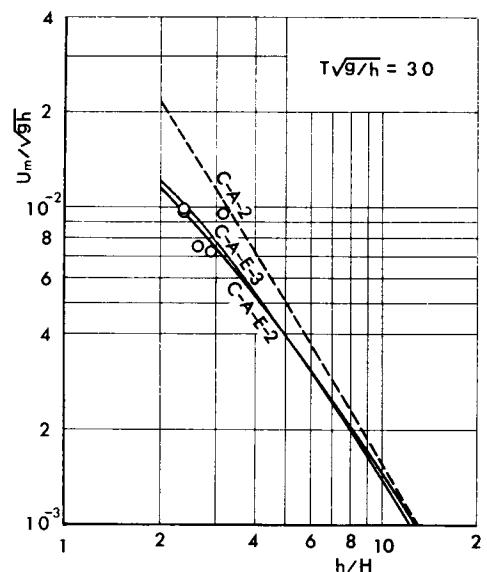


(b)

これから、実験値のばらつきは比較的小さく、 $T\sqrt{g/h}=25$  および  $30$  の場合については実験値は第3次近似解による質量輸送の理論曲線とよく対応していることがわかる。また、 $T\sqrt{g/h}=20$  の場合については、実験値は理論曲線よりも若干小さくなっているが、その  $h/H$  に対する傾向は理論曲線とよく対応し、この場合についても実験結果と第3次近似解による理論曲線とが比較的良好に一致しているといえてよいであろう。

#### 第4節 結 語

以上、著者は第2章において、水面変動および速度ポテンシャルが同一特性曲線上において一定値をとると仮定することにより、Stokes



(c)

図-2.34 断面平均した質量輸送速度の実験結果と理論曲線との比較

の波速の定義を用いないクノイド波理論を展開し、またその適用性を明らかにするために、定形波としての進行波の条件を十分満足させた新波浪水槽を用いて、波速および質量輸送に関する実験を行ってクノイド波の特性に関する理論結果との比較を行い、理論の妥当性を確かめたが、以下に各節の主要な結果を要



約して結語としたい。

まず、第1節では、従来の有限振幅波に関する理論的および実験的研究の問題点について考察し、有限振幅波理論の展開の手法と定形波としての進行波の実験における要点を述べた。

第2節では、まず流体力学の基礎方程式に、Gardner—Morikawa変換を用いた通減せつ動法を適用して、水面変動および速度ポテンシャルに関する連立偏微分方程式を誘導した。ついで、定形進行波を表す波動解を考えて、この偏微分方程式を水面変動で表示された定形波に関する波動方程式に変換した。そして、この方程式をせつ動法によって解いてクノイド波理論を展開し、その第3次近似解まで求めた。この理論によって、波形、波速および水粒子速度などをはじめ、波のエネルギー、エネルギーフラックス、極限波高および質量輸送速度などに対する数学的表示を与えた。なお、第2次近似解以上では、展開パラメーターが波高・水深比  $H/h$  の無理関数となるため、実用上の観点からこれを有理化し、 $H/h$  を展開パラメーターとする近似解を併せて示した。そして、波速および水平水粒子速度に関する理論結果を用いて、近似解の収束性について検討を行い、また、Laitoneのクノイド波理論との比較を行った。その結果、 $H/h$  を展開パラメーターとした近似解については、無次元周期  $T\sqrt{g/h} < 18$  の範囲においてその収束性に若干問題が見られるが、 $\lambda$  を展開パラメーターとした近似解では、 $T\sqrt{g/h} \geq 10$  において良好な収束性を示し、近似解として十分信頼できるものであることが明らかとなった。ついで、Laitoneの理論との比較では、従来の波速の定義を適用したLaitoneの理論との相違を明らかにすることができた。さらに、波のエネルギーおよびエネルギーフラックスについても、近似解の収束性が一様でかつ良好であることを確認するとともに、 $T\sqrt{g/h}$  および  $H/h$  が大きくなるに従って、波の非線形性の影響が著しくなり、微小振幅波理論によるエネルギーの表示との相違が著しくなることを明らかにした。また、著者の理論によれば、Stokesの波速の定義を適用した場合のように波動の場の拘束を行うことなく、Euler座標における質量輸送が水平水粒子速度の一周期の平均速度として表され、それが高次の非線形効果によって生じることを示した。そして、その質量輸送速度はほぼ一様な鉛直分布で波の進行方向と一致し、その輸送量は全輸送量の約  $1/3$  であることを明らかにした。なお、Lagrange座標で水粒子速度に関する表示を与え、またその結果から質量輸送速度に関する表示を示したが、これによると第3次近似解においては、それらの鉛直分布が生じることを見出した。また、水粒子の軌跡に関するできるだけ詳細な計算を行ってその特性を究明したが、この場合Euler座標での水粒子速度のLagrange座標への変換において、Stokes以来用いられてきた水粒子の運動の平均位置の周りに展開する方法は、クノイド波の場合には一般に大きな誤差を伴うことを明らかにした。

一方、孤立波については、クノイド波理論におけるだ円関数の母数  $k=1$  とした極限として、クノイド波の場合と同様に、その数学的表示を導き、波速に関して近似解の収束性およびその特性について検討した。その結果、展開パラメーター  $\lambda$  および  $H/h$  のいずれでも、その収束性はきわめて良好であり、一様にByatt—Smithの厳密解に収束する傾向が見られた。特に、 $H/h$  による第3次近似解の波速の数学的表示はFentonによるものと一致することが示された。最後に、極限波高をRankine—Stokesの極限波高の条件を用いて計算した結果、 $T\sqrt{g/h}$  が大きくなるに従って  $H_{\max}/h$  も大きくなり、第3次近似解では孤立波の値  $H_{\max}/h=0.846$  に収束することが明らかとなった。この孤立波に対する値は、Byatt—Smith

やLenauによって求められた値にきわめて近いことから、第3次近似解が十分な精度を持つものと考えられた。

つぎに、第3節では、第2節で展開したクノイド波理論の適用性を実験的に検証するためには、定形波としての進行波の条件を満足させて実験を行う必要であり、このため波の波形および波速と同時に質量輸送の一様性および定常性を実験水槽内において確保することが必須になることを述べた。そして、従来用いられてきた波浪水槽では、後者の条件を満足させることが根本的に不可能であることを従来の実験水槽において確かめたのち、これら2つの条件を同時に満足できる新しい波浪水槽を試作した。ついで、この試作した波浪水槽を用いて、有限振幅波の波形、波速および質量輸送に関する理論曲線と比較した。その結果、得られた実験結果は波形に微小じょう乱が重じょうされているものもあり、また広範囲な波の特性にわたって比較できなかったが、波形がクノイド波理論によく一致する場合の波速の実験結果は、 $T\sqrt{g/h}=20, 25$  および  $30$  の場合には新しいクノイド波理論の第3次近似解による理論曲線とよく一致することがわかった。ついで、Lagrange 座標における質量輸送速度の鉛直分布に関する実験では、波形に現われた微小じょう乱などの影響のため、実験結果は若干ばらつき、理論曲線との対応は必ずしも良好ではなかったが、質量輸送速度が波の進行方向にはほぼ一様な鉛直分布を示すことを確かめることができた。また、断面平均の質量輸送速度に関する実験結果は、新しいクノイド波理論の第2次および第3次近似解による理論曲線のいずれとも比較的良好に一致することがわかった。

以上述べたことから、著者が提案した新しいクノイド波理論の適用性が、 $T\sqrt{g/h}=20, 25$  および  $30$  の場合について明らかにされるとともに、この種の実験における新波浪水槽の意義も明確にできたといえよう。しかし、この理論の適用限界を究明するためには、なお広範囲な波の特性において系統的な実験を実施しなければならないであろう。

#### 参 考 文 献

- 1) Le Méhauté, B. : Mass Transport in Cnoidal Waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 73, 1968, pp. 5973-5979.
- 2) Stokos, G. G. : On the Theory of Oscillatory Waves, Trans. Cambridge Phil. Soc., Vol. 8, 1847, pp. 197-229.
- 3) Tsuchiya, Y. and M. Yamaguchi : Some Consideration on Water Particle Velocities of Finite Amplitude Wave Theories, Coastal Engg. in Japan, Vol. 15, 1972, pp. 43-57.
- 4) Korteweg, D. T. and G. de Vries : On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves, Phil. Mag., Vol. 5(39), 1895, pp. 422-443.
- 5) Skjelbreia, L. : Gravity Waves, Stokes, Third Order Approximation, Tables of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959, pp. 1-337.
- 6) Dean, R. G. : Stream Function Representation of Nonlinear Ocean Waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 70, 1965, pp. 4561-4572.
- 7) Schwind, J. J. and R. Q. Reid : Characteristics of Gravity Waves of Permanent Form, Jour.

Geophys. Res., 1972, Vol. 77, pp. 420-433.

- 8) Monkmeier, P. L. : A Higher Order Theory for Symmetrical Gravity Waves, Proc. 12th Conf. on Coastal Engg., 1970, pp. 543-559.
- 9) 田中清 : 海の波の解析概説, 第2回海岸工学講演会講演集, 1955, pp. 17-32.
- 10) Keulegan, G. H. and G. W. Patterson : Mathematical Theory of Irrotational Translation Waves, National Bureau of Standards, Report 1272, 1940, pp. 47-101.
- 11) Le Méhauté, B., D. Divoky and A. Lin : Shallow Water Waves ; A Comparison of Theories and Experiments, Proc. 11th Conf. on Coastal Engg., 1968, pp. 87-101.
- 12) 岩垣雄一・細見昌彦 : クノイド波に関する二, 三の実験, 第13回海岸工学講演会講演集, 1966, pp. 1-8.
- 13) 岩垣雄一・山口正隆 : Stokes 波とクノイド波の適用限界について, 第14回海岸工学講演会講演集, 1967, pp. 8-16.
- 14) Goda, Y. : Wave Forces on a Vertical Circular Cylinder : Experiments and a Proposed Method of Wave Force Computation, Report Port and Harbour Tech. Res. Inst., No. 8, 1964, pp. 1-74.
- 15) Gardner, C. S. and G. K. Morikawa : Courant Inst. Math. Sci, Rep. NYO 9082, 1960.
- 16) 谷内俊弥 : 非線型波動伝播に於ける漸近的な考え方について, Nagare, Vol. 3, 1971, pp. 5-26.
- 17) Taniuti, T. and C. C. Wei : Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation. I, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 24, No. 4, 1968, pp. 941-946.
- 18) Kakutani, T., H. Ono, T. Taniuti and C. C. Wei : Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation II. Application to Hydromagnetic Waves in Cold Plasma, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 24, No. 5, 1968, pp. 1159-1166.
- 19) T. Taniuti and N. Yajima : Perturbation Method for a Nonlinear Wave Modulation. I, Jour. Math. Physics, Vol. 10, No. 8, 1969, pp. 1369-1371.
- 20) Laitone, E. V. : The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 9, 1960, pp. 430-444.
- 21) Laitone, E. V. : Series Solutions for Shallow Water Waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 70, 1965, pp. 995-998.
- 22) Byatt-Smith, J. G. B. : An Exact Integral Equation for Steady Surface Waves, Proc. Roy. Soc. Lond., A. 315, 1970, pp. 405-418.
- 23) Fenton, J. : A Ninth-Order Solution for the Solitary Waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 53, 1972, pp. 257-271.
- 24) Lenau, C. W. : The Solitary Wave of Maximum Amplitude, Jour. Fluid Mech., Vol. 26, 1966, pp. 309-320.
- 25) Galvin, C. J. : Finite-Amplitude Shallow Water Waves of Periodically Recurring Forms

Proc. Symp. on Long Waves, 1970, p. 32.

26) 土屋義人・安田孝志：浅海における波の変形—特に Soliton の発生について—, 第 20 回海岸工学講演会論文集, 1973, pp. 397—401.

27) Russell, R. C. H. and J. D. C. Osorio : An Experimental Investigation of Drift Profiles in a Closed Channel, Proc. 6th Conf. on Coastal Engg., 1957, pp. 171—183.

## 第3章 擬 Stokes 波理論に関する研究

### 第1節 概 説

前章では、いわゆる通減せつ動法<sup>1),2)</sup>を用いて水面変動に関する偏微分方程式の誘導を行い、Stokes の波速の定義を用いない新しいクノイド波理論を展開した。ところで、この理論は波の分散性および非線形性が平衡関係にあるとして展開されているため、分散性が非線形性に対して卓越してくるような沿岸海域でも比較的水深の深い領域では、この理論の適用性が不十分となるので、このような領域において適用可能な同様な手法による有限振幅波理論が必要である。

従来の Stokes 波理論は、そうした分散性の卓越した領域において適用可能な波の理論であって、岩垣ら<sup>3)</sup>によってその適用性が実験的に検討されてきたが、前章で述べたように、この Stokes 波理論における波速の任意性<sup>5),6)</sup>と実験的検討のための波浪水槽に起因する問題のため、なお基本的な面での検討が必要とされるのである。このため本章では、クノイド波理論の適用領域よりも沖側で適用できる波理論を展開することにする。

まず、前章で用いた通減せつ動法に従って、その若干の一般化を試み、波の分散性が非線形性に対して  $\varepsilon$  のオーダーだけ卓越した場合の波理論を試みる。この結果、第1次近似式として線形化された K-dV 方程式を持つような基礎方程式が誘導されることから、定形波を対象とした場合の解は初等関数によって Stokes 波に類似して表示され、新しいクノイド波理論と同様に、基礎方程式から波速が定義されることになる。このことから、本研究では、この新しい波を擬 Stokes 波と呼ぶことにする。そして本章では、このような擬 Stokes 波理論を第4次近似解まで展開して、この波の特性とくに波形、波速および水粒子速度のみならず、波のエネルギー、エネルギーフラックス、質量輸送速度および極限波高に対する数学的表示を与え、さらにそれらの数値計算結果から、その近似解の収束性を調べるとともに、新しいクノイド波理論との比較から、両者の適用性における関連を明らかにする。

### 第2節 擬 Stokes 波理論

ここでは、概説において述べたように、第2章で述べた通減せつ動法を若干一般化して定式化したのち、 $\varepsilon$  のオーダーだけ波の分散性が非線形性より卓越した場合について、水面変動に関する方程式を誘導し、その第4次近似解を求めて擬 Stokes 波理論を展開する。

#### (1) 波動方程式の誘導

##### a) 基礎方程式

この場合についても、第2章で述べたクノイド波理論の場合と同様の基礎方程式を用いることにすれば、その無次元基礎方程式は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi^* &= 0 \\ \phi_{t^*}^* + \frac{1}{2} (\phi_{x^*}^{*2} + \phi_{z^*}^{*2}) + z'^* - 1 \Big|_{z^*=1+z'^*} &= 0 \\ z_{t^*}' + z_{x^*}' \phi_{x^*}^* - \phi_{z^*}^* \Big|_{z^*=1+z'^*} &= 0 \\ \phi_{z^*}^* \Big|_{z^*=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.1)$$

b) 基礎方程式の誘導

周知のように、式(3.1)の通常の時動解を求めれば、いわゆる Stokes 波理論が誘導され、また波の分散性と非線形性が平衡しているような条件で取扱えば、第2章で述べたようにクノイド波理論が誘導されるが、ここでは概説で述べたように、このクノイド波理論の適用領域よりも少し沖側で適用できる有限振幅波理論を展開することにする。このため、波の分散性と非線形性の評価が便利のように、いわゆる通減時動法を用いて、それを若干一般化することにする。そこで、式(2.11)および(2.12)に代わって、次式に示す時動解を考える。

$$\left. \begin{aligned} z'^* &= \varepsilon^n \sum_{m=1} \varepsilon^{m-1} \eta_m \\ \phi^* &= \varepsilon^{n-1/2} \sum_{m=1} \varepsilon^{m-1} \phi_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

ここに、 $n$  は非線形性と分散性との比を表し、クノイド波理論の場合には  $n=1$  である。ここで、式(2.10)および(3.2)を式(3.1)に適用すれば、式(3.1)はそれぞれ次式のように書き換えられる。

$$\varepsilon^{n-1/2} \sum_{m=1} \varepsilon^{m-1} (\varepsilon \phi_{m\xi\xi} + \phi_{m\zeta\zeta}) = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^n \Big[ - \sum_{m=1} \varepsilon^{m-1} (\phi_{m\xi} - \eta_m - \varepsilon \phi_{m\tau}) + \varepsilon^n \sum_{\ell, m=1} \varepsilon^{\ell+m-2} \Big( & -\eta_\ell \phi_{m\xi\zeta} + \frac{1}{2} \phi_{\ell\xi} \phi_{m\xi} + \frac{\varepsilon^{-1}}{2} \phi_{\ell\zeta} \phi_{m\zeta} \\ & + \varepsilon \eta_\ell \phi_{m\tau\zeta} \Big) + \varepsilon^{2n} \sum_{k, \ell, m} \varepsilon^{k+\ell+m-3} \Big( -\frac{1}{2} \eta_k \eta_\ell \phi_{m\xi\zeta\zeta} + \eta_k \phi_{\ell\zeta} \phi_{m\xi\zeta} + \varepsilon^{-1} \eta_k \phi_{\ell\zeta} \phi_{m\zeta\zeta} \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon \eta_k \eta_\ell \phi_{m\tau\zeta\zeta} \Big) + \dots\dots\dots \Big] \Big|_{\zeta=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n+1/2} \Big[ - \sum_{m=1} \varepsilon^{m-1} (\eta_{m\xi} - \varepsilon \eta_{m\tau} + \varepsilon^{-1} \phi_{m\zeta}) + \varepsilon^n \sum_{\ell, m=1} \varepsilon^{\ell+m-2} \Big( & \eta_{\ell\xi} \phi_{m\xi} - \varepsilon^{-1} \eta_\ell \phi_{m\zeta\zeta} \\ & + \varepsilon^{2n} \sum_{k, \ell, m} \varepsilon^{k+\ell+m-3} (\eta_k \eta_\ell \phi_{m\xi\zeta} - \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} \eta_k \eta_\ell \phi_{m\zeta\zeta\zeta}) + \dots\dots\dots \Big] \Big|_{\zeta=1} = 0 \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\epsilon^{n-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^{m-1} \phi_{m\zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

ここで、 $n \rightarrow \infty$  とすれば、クノイド波理論の場合と同様に、式 (3.3), (3.4), (3.5) および (3.6) から、次式のような水面変動のみで表した方程式を得ることができる。

$$\eta_{\tau} + \frac{1}{6} \eta_{\xi\xi\xi} = -\frac{\epsilon}{15} \eta_{\xi\xi\xi\xi\xi} - \frac{17}{630} \epsilon^2 \eta_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} - \dots\dots\dots (3.7)$$

上式の定形波としての進行波の解のうち、その第 1 次近似解は、いわゆる微小振幅波理論の解に対応し、式 (3.3), (3.4), (3.5) および (3.6) は結局所要の  $n = 1 \sim \infty$  の値に応じて、任意の非線形性を持つ分散波動を表示できるものと思われる。しかしながら、これから定形波の理論を誘導するには、具体的な  $n$  の値を与える必要があり、ここでは、 $\epsilon$  のオーダーだけ分散性を非線形性に対して強くした  $n = 2$  の場合についてその理論展開を行う。このため、式 (2.10) に示したと同様の変換を式 (3.1) に適用し、式 (3.2) において  $n = 2$  とした場合に相当するせつ動解をつぎのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} z'^*(x^*, t^*) &= \epsilon^2 \eta_1(\xi, \tau) + \epsilon^3 \eta_2(\xi, \tau) + \dots\dots\dots \\ \phi^*(x^*, z^*, t^*) &= \epsilon^{3/2} \{ \phi_1(\xi, \zeta, \tau) + \epsilon \phi_2(\xi, \zeta, \tau) + \dots\dots\dots \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.8)$$

ここに、前章で用いたように、 $\epsilon = (h/L)^2$  であり、 $h$  および  $L$  ; それぞれ平均水深および波長である。また、式 (3.8) に対しては式 (2.13) と同様な展開を行えば、結局式 (3.1) は式 (3.9), (3.10), (3.11) および (3.12) のようになる。

$$\epsilon^{3/2} \phi_{1\zeta\zeta} + \epsilon^{5/2} (\phi_{2\zeta\zeta} + \phi_{1\xi\xi}) + \epsilon^{7/2} (\phi_{3\zeta\zeta} + \phi_{2\xi\xi}) + \epsilon^{9/2} (\phi_{4\zeta\zeta} + \phi_{3\xi\xi}) + \dots = 0 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} &\epsilon^2 (\eta_1 - \phi_{1\xi}) + \epsilon^3 (\eta_2 - \phi_{2\xi} + \phi_{1\tau} + \frac{1}{2} \phi_{1\zeta}^2) + \epsilon^4 (-\phi_{3\xi} - \eta_1 \phi_{1\xi\zeta} + \phi_{2\tau} + \eta_3 \\ &+ \frac{1}{2} \phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta} \phi_{2\zeta}) + \epsilon^5 (-\phi_{4\xi} - \eta_2 \phi_{1\xi\zeta} - \eta_1 \phi_{2\xi\zeta} + \phi_{3\tau} + \phi_{1\xi} \phi_{2\xi} + \phi_{1\zeta} \phi_{3\zeta} \\ &+ \frac{1}{2} \phi_{2\zeta}^2 + \eta_4) + \epsilon^6 (-\phi_{5\xi} - \eta_3 \phi_{1\xi\zeta} - \eta_2 \phi_{2\xi\zeta} - \eta_1 \phi_{3\xi\zeta} + \phi_{4\tau} + \eta_1 \phi_{2\tau\zeta} + \frac{1}{2} \phi_{2\xi}^2 + \phi_{1\xi} \phi_{3\xi} \\ &+ \eta_1 \phi_{1\xi} \phi_{1\xi\zeta} + \phi_{1\zeta} \phi_{4\zeta} + \phi_{2\zeta} \phi_{3\zeta} + \eta_5) + O(\epsilon^7) \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\epsilon^{3/2} (-\phi_{1\zeta}) + \epsilon^{5/2} (-\eta_1 \xi - \phi_{2\zeta}) + \epsilon^{7/2} (-\eta_2 \xi - \phi_{3\zeta} + \eta_{1\tau} - \eta_1 \phi_{1\zeta\zeta}) + \epsilon^{9/2} (-\eta_3 \xi + \eta_{2\tau} - \phi_{4\zeta} \\ &+ \eta_{1\xi} \phi_{1\xi} - \eta_1 \phi_{2\zeta\zeta} - \eta_2 \phi_{1\zeta\zeta}) + \epsilon^{11/2} (-\eta_4 \xi + \eta_{3\tau} + \eta_{2\xi} \phi_{1\xi} + \eta_{1\xi} \phi_{2\xi} - \phi_{5\zeta} - \eta_2 \phi_{2\zeta\zeta} \\ &- \eta_1 \phi_{3\zeta\zeta} - \eta_3 \phi_{1\zeta\zeta} - \frac{1}{2} \eta_1^2 \phi_{1\zeta\zeta\zeta}) + \epsilon^{13/2} (-\eta_5 \xi + \eta_{4\tau} - \phi_{6\zeta} + \eta_{3\xi} \phi_{1\xi} + \eta_{2\xi} \phi_{2\xi} + \eta_{1\xi} \phi_{3\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_1 \eta_{1\xi} \phi_{1\xi\zeta} - \eta_3 \phi_{2\zeta\zeta} - \eta_4 \phi_{1\zeta\zeta} - \eta_1 \phi_{4\zeta\zeta} - \eta_2 \phi_{3\zeta\zeta} - \frac{1}{2} \eta_1^2 \phi_{2\zeta\zeta\zeta} - \eta_1 \eta_2 \phi_{1\zeta\zeta\zeta} ) \\
& + O(\epsilon^{15/2}) \Big|_{\zeta=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.11)
\end{aligned}$$

$$\epsilon^{3/2} \phi_{1\zeta} + \epsilon^{5/2} \phi_{2\zeta} + \epsilon^{7/2} \phi_{3\zeta} + \epsilon^{9/2} \phi_{4\zeta} + O(\epsilon^{11/2}) \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

したがって、式 (3.9), (3.10), (3.11) および (3.12) より、まず  $\epsilon^2$  のオーダーに対しては、次式が得られる。

$$\phi_1 = \phi_1(\xi, \tau) \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

$\epsilon^2$  のオーダーに対しては、

$$\left. \begin{aligned} \phi_2 &= -\frac{1}{2} \zeta^2 \phi_{1\xi\xi} + \varphi_1(\xi, \tau) \\ \eta_1 &= \phi_{1\xi} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

ここに、 $\varphi_1(\xi, \tau)$  は  $\zeta$  に関する積分定数である。つぎに、 $\epsilon^3$  のオーダーに対しては、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_3 &= \frac{1}{4!} \zeta^4 \phi_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2} \zeta^2 \varphi_{1\xi\xi} + \varphi_2(\xi, \tau) \\ \varphi_{1\xi} &= \eta_2 + \frac{1}{2} \eta_{1\xi\xi} + \phi_{1\tau} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

$$\eta_{1\tau} + \frac{1}{6} \eta_{1\xi\xi\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

ここに、 $\varphi_2(\xi, \tau)$  は  $\zeta$  に関する積分定数であり、式 (3.16) は線形化された K-dV 方程式として知られているものである。同様に、 $\epsilon^4$  のオーダーに対しては、

$$\left. \begin{aligned} \phi_4 &= -\frac{1}{6!} \zeta^6 \phi_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{4!} \zeta^4 \varphi_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2} \zeta^2 \varphi_{2\xi\xi} + \varphi_3(\xi, \tau) \\ \varphi_{2\xi} &= \eta_3 + \frac{1}{2} \eta_1^2 - \frac{1}{2} \eta_{1\xi\tau} - \frac{1}{24} \eta_{1\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{2} \varphi_{1\xi\xi\xi} + \varphi_{1\tau} \\ \eta_{2\tau} + \frac{1}{6} \eta_{2\xi\xi\xi} + \frac{3}{2} \eta_1 \eta_{1\xi} + \frac{1}{15} \eta_{1\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{6} \eta_{1\xi\xi\tau} + \frac{1}{2} \phi_{1\tau\tau} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (3.17)$$

ここに、 $\varphi_3(\xi, \tau)$  は  $\zeta$  に関する積分定数である。さらに、 $\epsilon^5$  のオーダーに対しては、

$$\phi_5 = \frac{1}{8!} \zeta^8 \phi_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{6!} \zeta^6 \varphi_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{4!} \zeta^4 \varphi_{2\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2} \zeta^2 \varphi_{3\xi\xi} + \varphi_4(\xi, \tau)$$



$$\begin{aligned}
\varphi_{3\xi} = & \eta_4 + \frac{1}{6!} \eta_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{24} \eta_{1\xi\xi\xi\xi\tau} + \frac{1}{2} \eta_1 \eta_{1\xi\xi} + \frac{1}{2} \eta_{1\xi}^2 - \frac{1}{24} \varphi_{1\xi\xi\xi\xi\xi} \\
& - \frac{1}{2} \varphi_{1\xi\xi\tau} + \eta_1 \varphi_{1\xi} + \frac{1}{2} \varphi_{2\xi\xi\xi} + \varphi_{2\tau} \\
\eta_{3\tau} + \frac{1}{6} \eta_{3\xi\xi\xi} + \frac{3}{2} (\eta_1 \eta_2)_\xi + \frac{1}{15} \eta_{2\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{6} \eta_{2\xi\xi\tau} + \frac{1}{2} \varphi_{1\tau\tau} + \frac{1}{15} \eta_{1\xi\xi\xi\xi\tau} \\
& + \frac{3}{2} \eta_{1\xi} \eta_{1\xi\xi} + \frac{2}{3} \eta_1 \eta_{1\xi\xi\xi} - \frac{1}{12} \eta_{1\xi\tau\tau} + \frac{3}{2} \eta_1 \eta_{1\tau} + \eta_{1\xi} \phi_{1\tau} + \frac{17}{630} \eta_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi} = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

ここに、 $\varphi_4(\xi, \tau)$  は  $\zeta$  に関する積分定数であり、また  $\varepsilon^6$  のオーダーに対しては、同様にして次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\phi_6 = & -\frac{1}{10!} \zeta^{10} \phi_{1\xi^{10}} + \frac{1}{8!} \zeta^8 \varphi_{1\xi^8} - \frac{1}{6!} \zeta^6 \varphi_{2\xi^6} + \frac{1}{4!} \zeta^4 \varphi_{3\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2} \zeta^2 \varphi_{4\xi\xi} \\
& + \varphi_5(\xi, \tau) \\
\varphi_{4\xi} = & \eta_5 - \frac{1}{8!} \eta_{1\xi^8} + \eta_2 \eta_{1\xi\xi} - \frac{1}{8} \eta_1 \eta_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{6} \eta_{1\xi} \eta_{1\xi\xi\xi} - \frac{1}{6!} \eta_{1\xi\xi\xi\xi\xi\tau} - \eta_1 \eta_{1\xi\tau} \\
& + \frac{1}{6!} \varphi_{1\xi^7} - \frac{1}{24} \varphi_{2\xi^5} + \frac{1}{2} \varphi_{3\xi\xi\xi} + \eta_1 \varphi_{1\xi\xi\xi} + \frac{1}{24} \varphi_{1\xi\xi\xi\xi\tau} - \frac{1}{2} \varphi_{2\xi\xi\tau} + \varphi_{3\tau} \\
& - \frac{1}{2} \eta_{1\xi\xi} \varphi_{1\xi} + \frac{1}{2} \varphi_{1\xi}^2 - \frac{1}{2} \eta_1 \varphi_{1\xi\xi\xi} + \eta_1 \varphi_{2\xi} + \eta_{1\xi} \varphi_{\xi\xi} \\
\eta_{4\tau} + \frac{1}{6} \eta_{4\xi\xi\xi} + \frac{3}{2} \eta_2 \eta_{2\xi} + \frac{3}{2} (\eta_1 \eta_3)_\xi + \frac{1}{15} \eta_{3\xi^5} + \frac{1}{6} \eta_{3\xi\xi\tau} + \frac{1}{2} \varphi_{2\tau\tau} + \frac{1}{15} \eta_{2\xi\xi\xi\xi\tau} \\
& + \frac{3}{2} \eta_{1\xi} \eta_{2\xi\xi} + \frac{3}{2} \eta_{2\xi} \eta_{1\xi\xi} + \frac{2}{3} \eta_1 \eta_{\tau\xi\xi\xi} + \frac{2}{3} \eta_2 \eta_{1\xi\xi\xi} - \frac{1}{12} \eta_{2\xi\tau\tau} + \frac{3}{2} \eta_1 \eta_{2\tau} \\
& + \frac{3}{2} \eta_2 \eta_{1\tau} + \eta_{2\xi} \phi_{1\tau} + \eta_{1\xi} \varphi_{1\tau} + \frac{31}{2835} \eta_{1\xi^9} + 2 \eta_{1\xi\xi} \eta_{1\xi\xi\xi} + \frac{4}{3} \eta_{1\xi} \eta_{1\xi\xi\xi\xi} \\
& + \frac{2}{5} \eta_1 \eta_{1\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{17}{630} \eta_{1\xi\xi\xi\xi\xi\tau} - \frac{3}{80} \eta_{1\xi\xi\xi\tau\tau} + \frac{5}{3} \eta_{1\tau} \eta_{1\xi\xi} + \frac{5}{6} \eta_1 \eta_{1\xi\xi\tau} \\
& + \frac{4}{3} \eta_{1\xi} \eta_{1\xi\tau} - \frac{1}{12} \eta_{1\tau\tau\tau} + \frac{1}{6} \phi_{1\tau} \eta_{1\xi\xi\xi} + \frac{3}{2} \eta_{1\tau}^2 \eta_{1\xi} + \frac{3}{2} \eta_{1\tau} \phi_{1\tau\tau} + \eta_{1\tau} \phi_{1\tau} = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

ここに、 $\varphi_5(\xi, \tau)$  は  $\zeta$  に対する積分定数である。

同様な手法を順次繰り返すことによって、式 (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.18) および (3.19) は、最終的に次式に示す水面変動  $\eta$  および速度ポテンシャル  $\mathcal{Q}$  に関する連立偏微分方程式に書き換えられるであろう。

$$\begin{aligned}
\eta_\tau + \frac{1}{6} \eta_{\xi\xi\xi} = & -\epsilon \left\{ \frac{3}{2} \eta \eta_\xi + \frac{1}{15} \eta_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{6} \eta_{\xi\xi\tau} + \frac{1}{2} Q_{\tau\tau} \right\} - \epsilon^2 \left\{ \frac{17}{630} \eta_\xi^7 + \frac{1}{15} \eta_{\xi\xi\xi\xi\tau} \right. \\
& + \frac{3}{2} \eta_\xi \eta_{\xi\xi} + \frac{2}{3} \eta \eta_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{12} \eta_{\xi\tau\tau} + \frac{3}{2} \eta \eta_\tau + \eta_\xi Q_\tau \left. \right\} - \epsilon^3 \left\{ \frac{31}{2835} \eta_{\xi^9} + \frac{17}{630} \eta_{\xi^6\tau} \right. \\
& - \frac{3}{80} \eta_{\xi\xi\xi\tau\tau} + 2 \eta_{\xi\xi} \eta_{\xi\xi\xi} + \frac{4}{3} \eta_\xi \eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{2}{5} \eta \eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{5}{3} \eta_\tau \eta_{\xi\xi} + \frac{5}{6} \eta \eta_{\xi\xi\tau} + \frac{4}{3} \eta_\xi \eta_{\xi\tau} \\
& \left. - \frac{1}{12} \eta_{\tau\tau\tau} + \frac{1}{6} \eta_{\xi\xi\xi} Q_\tau + \frac{3}{2} \eta^2 \eta_\xi + \frac{3}{2} \eta Q_{\tau\tau} + \eta_\tau Q_\tau \right\} + O(\epsilon^4) \quad \dots\dots\dots (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_\xi - \eta = & \epsilon \left\{ \frac{1}{2} \eta_{\xi\xi} + Q_\tau \right\} + \epsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{5}{24} \eta_{\xi\xi\xi\xi} \right\} + \epsilon^3 \left\{ \frac{61}{720} \eta_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{3}{2} \eta \eta_{\xi\xi} \right. \\
& \left. + \eta_\xi^2 + \eta Q_\tau \right\} + O(\epsilon^4) \quad \dots\dots\dots (3.21)
\end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \epsilon \eta_2 + \epsilon^2 \eta_3 + \dots\dots, & z'/h &= \epsilon^2 \eta \\ Q &= \phi_1 + \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots\dots, & \phi^* &= \epsilon^{3/2} (Q - \epsilon \zeta^2 Q_{\xi\xi}/2 + \epsilon^2 \zeta^4 Q_{\xi\xi\xi\xi}/4! - \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.22)$$

この場合も前章と同様、式 (3.20) および (3.21) の解として、固有値  $c^*$  を含む次式の関係

$$\eta(\xi, \tau) = \eta(\sigma), \quad Q(\xi, \tau) = Q(\sigma), \quad \sigma = \xi - c^* \tau \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

を満足する定形進行波を表す波動解を考えることにすれば、式 (3.20) および (3.21) の両式から  $Q$  を消去することができ、次式を導くことができる。

$$\begin{aligned}
-c^* \eta_\sigma + \frac{1}{6} \eta_{\sigma\sigma\sigma} = & -\epsilon \left\{ \frac{3}{2} \eta \eta_\sigma + \frac{1}{15} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{2} c^{*2} \eta_\sigma \right\} - \epsilon^2 \left\{ \frac{17}{630} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\
& - \frac{1}{15} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} + \frac{2}{3} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{6} c^{*2} \eta_{\sigma\sigma\sigma} - \frac{5}{2} c^* \eta \eta_\sigma - \frac{1}{2} c^{*3} \eta_\sigma \left. \right\} - \epsilon^3 \left\{ \frac{31}{2835} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\
& + 2 \eta_{\sigma\sigma} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{4}{3} \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{2}{5} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{17}{630} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{15} c^{*2} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{7}{2} c^* \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} \\
& \left. - c^* \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c^{*3} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta^2 \eta_\sigma + 4 c^{*2} \eta \eta_\sigma + \frac{1}{2} c^{*4} \eta_\sigma \right\} + O(\epsilon^4) \quad \dots\dots\dots (3.24)
\end{aligned}$$

これが、本章で取扱う波の基礎方程式である。ところで、この場合もクノイド波理論の場合と同様に、最高階の微係数  $\eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma}$  に  $\epsilon$  が掛かっているため、その解を線形化された K-dV 方程式の解の周りに微少量  $\epsilon$  展開して求めるためには、 $(31/2835) \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \sim (3/2) \eta^2 \eta_\sigma$  であるような比較的平滑な波であることが必要条件になろう。さらに、上式は  $\eta$  以外に固有値  $c^*$  を含むため、式 (3.22) に示した  $\eta$  に対するせつ動解だけでなく、次式に示す固有値  $c^*$  に対するせつ動解

$$c^* = c_0 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \dots \quad (3.25)$$

をも仮定して解く必要がある。

また、波の力学的特性を表す水粒子速度および圧力についても同様に水面変動  $\eta$  を用いて表せば、それらは以下ようになる。まず、水平および鉛直水粒子速度は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{g_h}} &= \frac{\phi_x}{\sqrt{g_h}} \\ &= \epsilon^2 \eta + \epsilon^3 \left[ -c^* \eta - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{\sigma\sigma} \right] + \epsilon^4 \left[ \frac{1}{24} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 5 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} c^* \eta_{\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \eta^2 + c^{*2} \eta \left. \right] + \epsilon^5 \left[ -\frac{1}{720} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^6 - 15 \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 75 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 61 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} \eta_{\sigma}^2 - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} \eta_{\sigma} \eta_{\sigma\sigma} + \frac{1}{24} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 7 \right\} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} c^* \eta^2 - c^{*3} \eta \right] + \dots \\ &= \epsilon^2 \eta_1 + \epsilon^3 \left[ \eta_2 - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{\sigma\sigma} - c_0 \eta_1 \right] + \epsilon^4 \left[ \eta_3 - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{2\sigma\sigma} - c_0 \eta_2 - c_1 \eta_1 \right. \\ &\quad + \frac{1}{24} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 5 \right\} \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} c_0 \eta_{1\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \eta_1^2 + c_0^2 \eta_1 \left. \right] \\ &\quad + \epsilon^5 \left[ \eta_4 - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{3\sigma\sigma} - c_0 \eta_3 - c_1 \eta_2 - c_2 \eta_1 + \frac{1}{24} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 5 \right\} \eta_{2\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} c_1 \eta_{1\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} c_0 \eta_{2\sigma\sigma} + \eta_1 \eta_2 + c_0^2 \eta_2 + 2 c_0 c_1 \eta_1 - \frac{3}{2} c_0 \eta_1^2 \\ &\quad + c_0^2 \eta_2 - c_0^3 \eta_1 - \frac{1}{720} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^6 - 15 \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 75 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 61 \right\} \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} \eta_{1\sigma}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} + \frac{1}{24} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 7 \right\} c_0 \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} c_0^2 \eta_{1\sigma\sigma} - c_0^3 \eta_1 \left. \right] \\ &\quad + \dots \quad (3.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{g_h}} &= \frac{\phi_z}{\sqrt{g_h}} \\ &= -\epsilon^{5/2} \left( \frac{z}{h} \right) \eta_{\sigma} + \epsilon^{7/2} \left( \frac{z}{h} \right) \left[ \frac{1}{6} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + c^* \eta_{\sigma} \right] + \epsilon^{9/2} \left( \frac{z}{h} \right) \left[ -\frac{1}{120} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 10 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 25 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma} - c^{*2} \eta_{\sigma} - \eta \eta_{\sigma} \right] + \epsilon^{11/2} \left( \frac{z}{h} \right) \left[ \frac{1}{5040} \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^6 - 21 \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 175 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 427 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \end{aligned}$$



$$-c_0 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{6} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.29)$$

上式の一般解は次式で表される。

$$\eta_1 = A_{10} + A_{11} \cos \vartheta + B_{11} \sin \vartheta \quad \dots\dots\dots (3.30)$$

ここに、

$$\vartheta = (-6c_0)^{1/2} \left( \frac{x}{L} - \frac{ct}{L} \right) = (-6c_0)^{1/2} \sigma \quad \dots\dots\dots (3.31)$$

であり、式 (3.30) は容易に次式に書き換えられる。

$$\eta_1 = A_{10} + A \cos (\vartheta + \delta) \quad \dots\dots\dots (3.32)$$

なお、 $\vartheta = 0$  のとき  $\eta_1 = A_{10} + A$  とすれば、 $\delta = 0$  とできる。未知定数  $A_{10}$  および  $A$  は次式の波形に関する連続条件

$$\int_0^{2\pi} \eta d\vartheta = 0 \quad \dots\dots\dots (3.33)$$

および波高に関する条件

$$\frac{H}{h} = \epsilon^2 (\eta_{max} - \eta_{min}) \quad \dots\dots\dots (3.34)$$

によって、それぞれ次式のように決定される。

$$A_{10} = 0, \quad A = \lambda_0 / 2\epsilon^2, \quad \lambda_0 = H/h \quad \dots\dots\dots (3.35)$$

また、波速を表す未知定数  $c_0$  は、周期性の条件を式 (3.31) に適用することによって、次式のように決定される。

$$c_0 = -2\pi^2/3 \quad \dots\dots\dots (3.36)$$

これより、第 1 次近似解での波形は、

$$\frac{z'}{h} = \frac{1}{2} \left( \frac{H}{h} \right) \cos \vartheta, \quad \vartheta = \frac{2\pi h}{L} \left( \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \quad \dots\dots\dots (3.37)$$

で表され、その波速は次式となる。

$$\frac{c}{\sqrt{g_h}} = 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (3.38)$$

さらに、水平および鉛直水粒子速度は、それぞれ次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{g_h}} &= \frac{1}{2} \lambda_0 \cos \vartheta \\ \frac{w}{\sqrt{g_h}} &= \frac{1}{2} \lambda_0 \left( \frac{2\pi h}{L} \right) \left( \frac{z}{h} \right) \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.39)$$

また，波動に伴う圧力は，次式で表される。

$$\frac{p}{\rho g h} = 1 - \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \lambda_0 \cos \vartheta \quad \dots\dots\dots (3.40)$$

b) 第2次近似解

第2次近似解に対しては，式(3.24)から次式が導かれる。

$$c_0 \eta_{2\sigma} - c_1 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{6} \eta_{2\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta_1 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{15} \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c_0 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{2} c_0^2 \eta_{1\sigma} = 0 \quad \dots (3.41)$$

上式の解として，式(3.32)に示した第1次近似解に対応する特解のみを考えることにすれば，それは次式で示されるように永年項を含んだ形で一般的に表される。

$$\eta_2 = \sigma A_{21} \cos \vartheta + \sigma B_{21} \sin \vartheta + A_{22} \cos 2\vartheta + B_{22} \sin 2\vartheta \quad \dots\dots\dots (3.42)$$

そこで，永年項が消えるように，上式を式(3.41)に代入して係数を決定すれば，その結果は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{21} = B_{21} = B_{22} = 0 \\ c_1 = \frac{38}{45} \pi^4, \quad A_{22} = \frac{3A^2}{16\pi^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.43)$$

これより，第2次近似解は，

$$\eta_2 = \frac{3A^2}{16\pi^2} \cos 2\vartheta \quad \dots\dots\dots (3.44)$$

で表され， $A$ は式(3.34)に示した波高に関する条件より次式のようになる。

$$A = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon^2}, \quad \lambda_0 = \frac{H}{h} \quad \dots\dots\dots (3.45)$$

したがって，第2次近似解での波形は，結局次式で表される。

$$\frac{z}{h} = \frac{\lambda_0}{2} \cos \vartheta + \frac{3}{16} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \cos 2\vartheta \quad \dots\dots\dots (3.46)$$

また，波速は次式となる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{19}{360} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 \quad \dots\dots\dots (3.47)$$

また，水平および鉛直水粒子速度は，それぞれ次式で表される。

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{2} \lambda_0 \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \} \right] \cos \vartheta + \frac{3}{16} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \cos 2\vartheta \quad \dots\dots\dots (3.48)$$

$$\frac{w}{\sqrt{g h}} = \frac{\lambda_0}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right) \left( \frac{z}{h} \right) \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} \right] \sin \vartheta + \frac{3}{4} \lambda_0 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \sin 2\vartheta \quad \dots\dots\dots (3.49)$$

波動に伴う圧力は、次式で表される。

$$\frac{p}{\rho g h} = 1 - \frac{z}{h} + \frac{\lambda}{2} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \right] \cos \vartheta + \frac{3}{16} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \cos 2\vartheta \quad \dots (3.50)$$

c) 第3次近似解

第3次近似解に対しては、式(3.24)から次式が導かれる。

$$\begin{aligned} & -c_0 \eta_{3\sigma} - c_1 \eta_{2\sigma} - c_2 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{6} \eta_{3\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c_0 \eta_{2\sigma\sigma\sigma} + \frac{17}{630} \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{15} \eta_{2\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{15} c_0 \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma} \\ & + \frac{3}{2} \eta_{1\sigma} \eta_{1\sigma\sigma} + \frac{2}{3} \eta_{1\sigma} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{12} c_0^2 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \frac{3}{2} c_0 \eta_{1\sigma} \eta_{1\sigma} + \frac{3}{2} \eta_{1\sigma} \eta_{2\sigma} + \frac{3}{2} \eta_{2\sigma} \eta_{1\sigma} - c_0 \eta_{1\sigma} \eta_{1\sigma} - \frac{1}{6} c_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} \\ & + c_0 c_1 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{2} c_0^2 \eta_{2\sigma} + \frac{1}{4} c_0^2 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{2} c_0^3 \eta_{1\sigma} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.51) \end{aligned}$$

この場合も第2次近似解と同様に、第1次近似解に対応した特解のみを考えることにすれば、それは次式で表される。

$$\eta_3 = \sigma A_{31} \cos \vartheta + \sigma B_{31} \sin \vartheta + A_{32} \cos 2\vartheta + B_{32} \sin 2\vartheta + A_{33} \cos 3\vartheta + B_{33} \sin 3\vartheta \quad \dots (3.52)$$

上式を式(3.51)に代入し、永年項が消えるように係数を決定すれば、次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{31} &= B_{31} = B_{32} = B_{33} = 0 \\ A_{32} &= \frac{A^2}{2}, \quad A_{33} = \frac{27A^3}{1024\pi^4}, \quad c_2 = \frac{9A^2}{64\pi^2} - \frac{220}{189} \pi^6 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.53)$$

これより、求める第3次近似解は次式のように表される。

$$\eta_3 = \frac{A^2}{2} \cos 2\vartheta + \frac{27A^3}{1024\pi^4} \cos 3\vartheta \quad \dots\dots\dots (3.54)$$

ここに、未知定数Aは、式(3.34)に示した条件より次式のようにになる。

$$A = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon^2} \quad \dots\dots\dots (3.55)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \left( \frac{H}{h} \right)^{1/3} \left( \frac{128}{27} \left( \frac{2\pi h}{L} \right) \left[ \left\{ 1 + \left( \frac{128}{27} \right)^2 \left( \frac{L^2 H}{h^3} \right)^2 \pi^4 \right\}^{1/2} + 1 \right] \right)^{1/3} \left( \frac{H}{h} \right)^{1/3} \left( \frac{128}{27} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 \right. \\ & \quad \left. \left[ \left\{ 1 + \left( \frac{128}{27} \right)^2 \left( \frac{L^2 H}{h^3} \right)^2 \pi^4 \right\}^{1/2} - 1 \right] \right)^{1/3} \quad \dots\dots\dots (3.56) \end{aligned}$$

これより、第3次近似解での波形は、次式で表される。

$$\frac{z'}{h} = \frac{1}{2} \lambda_0 \cos \vartheta + \frac{1}{8} \lambda_0^2 \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \cos 2\vartheta + \frac{27}{512} \lambda_0^3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \cos 3\vartheta \quad \dots \quad (3.57)$$

その波速は次式となる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{19}{360} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{55}{3024} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{9}{64} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \quad \dots \quad (3.58)$$

また、水平および鉛直水粒子速度は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} &= \frac{1}{16} \lambda_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} + \frac{1}{120} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 \left\{ 5 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 20 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 12 \right\} \right] \cos \vartheta \\ &+ \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left[ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ 12 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 5 \right\} \right] \cos 2\vartheta + \frac{27}{512} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \cos 3\vartheta \quad \dots \quad (3.59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} &= \frac{1}{2} \lambda_0 \left( \frac{2\pi h}{L} \right) \left( \frac{z}{h} \right) \left( \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} + \frac{1}{320} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 40 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 96 \right\} \right] \sin \vartheta \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \lambda_0 \left[ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 5 \right\} \right] \sin 2\vartheta + \frac{1}{256} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \sin 3\vartheta \right) \quad \dots \quad (3.60) \end{aligned}$$

さらに、圧力は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho gh} &= 1 - \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \lambda_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} + \frac{1}{24} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 5 \right\} \right] \cos \vartheta \\ &+ \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left[ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + 2 \left\{ 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 5 \right\} \right] \cos 2\vartheta + \frac{27}{512} \lambda_0^3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \cos 3\vartheta \quad \dots \quad (3.61) \end{aligned}$$

#### d) 第4次近似解

第4次近似解に対しては、式(3.24)から次式が得られる。

$$\begin{aligned} &-c_0 \eta_{4\sigma} + \frac{1}{6} \eta_{4\sigma\sigma\sigma} - c_1 \eta_{3\sigma} - c_2 \eta_{2\sigma} - c_3 \eta_{1\sigma} + \frac{3}{2} \eta_1 \eta_{3\sigma} + \frac{3}{2} \eta_3 \eta_{1\sigma} + \frac{3}{2} \eta_2 \eta_{2\sigma} + \frac{1}{15} \eta_{3\sigma\sigma\sigma\sigma} \\ &- \frac{1}{6} c_0 \eta_{3\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c_1 \eta_{2\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c_2 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{2} c_0^2 \eta_{3\sigma} + c_0 c_1 \eta_{2\sigma} + c_0 c_2 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{2} c_1^2 \eta_{1\sigma} \\ &+ \frac{17}{630} \eta_{2\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{15} c_0 \eta_{2\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{15} c_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta_{1\sigma} \eta_{2\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta_{2\sigma} \eta_{1\sigma\sigma} + \frac{2}{3} \eta_1 \eta_{2\sigma\sigma} \\ &+ \frac{2}{3} \eta_2 \eta_{1\sigma\sigma} - \frac{1}{12} c_0^2 \eta_{2\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{3} c_0 c_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \frac{5}{2} c_0 \eta_1 \eta_{2\sigma} - \frac{5}{2} c_0 \eta_2 \eta_{1\sigma} - \frac{5}{2} c_1 \eta_1 \eta_{1\sigma} \\ &- \frac{1}{2} c_0^3 \eta_{2\sigma} - \frac{3}{2} c_0^2 c_1 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{4} c_0^2 \eta_{2\sigma\sigma\sigma} + \frac{31}{2835} \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} + 2 \eta_{1\sigma\sigma} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{4}{3} \eta_{1\sigma} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} \\ &+ \frac{2}{5} \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \frac{17}{630} c_0 \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{15} c_0^2 \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{7}{2} c_0 \eta_{1\sigma} \eta_{1\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c_0^3 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta_1^2 \eta_{1\sigma} \end{aligned}$$



$$-c_0 \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} + 4c_0^2 \eta_1 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{2} c_0^4 \eta_{1\sigma} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.62)$$

この場合、第2および第3次近似解の場合と同様に、上式の解として特解のみを考えることにし、永年項が生じないように解を決定すれば、結局次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_4 &= \left\{ \frac{613}{1260} \pi^2 A^2 - \frac{27A^4}{8192\pi^6} \right\} \cos 2\vartheta + \frac{45A^3}{256\pi^2} \cos 3\vartheta + \frac{27A^4}{8192\pi^6} \cos 4\vartheta \\ c_3 &= \frac{5882}{4725} \pi^3 + \frac{9}{32} A^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.63)$$

ここに、未知定数  $A$  は、式 (3.34) の条件を用いることにより、次式で表される。

$$A = \frac{\lambda_0}{2\epsilon^2} \quad \dots\dots\dots (3.64)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \left( \frac{H}{h} \right)^{1/3} \left( \frac{256 (2\pi h/L)^4}{18 \{ 3+5 (2\pi h/L)^2 \}} \left[ \left\{ 1 + \frac{16384 \pi^4}{243 (3+5 (2\pi h/L)^2)} \left( \frac{L^2 H}{h^3} \right)^{-2} \right\}^{1/2} + 1 \right] \right)^{1/3} \\ &\quad - \left( \frac{H}{h} \right)^{1/3} \left( \frac{256 (2\pi h/L)^4}{18 \{ 3+5 (2\pi h/L)^2 \}} \left[ \left\{ 1 + \frac{16384 \pi^4}{243 (3+5 (2\pi h/L)^2)} \left( \frac{L^2 H}{h^3} \right)^{-2} \right\}^{1/2} - 1 \right] \right)^{1/3} \\ &\dots\dots\dots (3.65) \end{aligned}$$

これより、第4次近似解での波形は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{z'}{h} &= \frac{1}{2} \lambda_0 \cos \vartheta + \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left\{ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + 2 + \frac{613}{1260} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 - \frac{27}{128} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-6} \right\} \cos 2\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{512} \lambda_0^3 \left\{ 27 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + 45 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \cos 3\vartheta + \frac{27}{2048} \lambda_0^4 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-6} \cos 4\vartheta \dots\dots (3.66) \end{aligned}$$

同様にして、波速は次式で表示される。

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{g_h}} &= 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{19}{360} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{55}{3024} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{2941}{604800} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^8 \\ &\quad + \frac{9}{64} \lambda_0^2 \left\{ \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \right\} \dots\dots\dots (3.67) \end{aligned}$$

また、水平および鉛直水粒子速度は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{g_h}} &= \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \lambda_0 \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} + \frac{1}{120} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 \right. \\ &\quad \left. \left\{ 5 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 20 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 12 \right\} + \frac{1}{15120} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 \left\{ 21 \left( \frac{z}{h} \right)^6 - 420 \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 756 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 278 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{64} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right] \cos \vartheta + \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left[ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ 12 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 5 \right\} + \frac{1}{2520} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right. \end{aligned}$$

$$\{ 5040 \left(\frac{z}{h}\right)^4 - 12600 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 3137 \} - \frac{27}{128} \lambda_0^2 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-6} \cos 2\vartheta + \frac{1}{512} \lambda_0^3 \left[ 27 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-4} \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} \left\{ 81 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 35 \right\} \right] \cos 3\vartheta + \frac{27}{2048} \lambda_0^4 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-6} \cos 4\vartheta \quad \dots\dots \quad (3.68)$$

$$\frac{w}{\sqrt{g_h}} = \frac{1}{2} \lambda_0 \left(\frac{2\pi h}{L}\right) \left(\frac{z}{h}\right) \left[ + \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^2 \left\{ \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 2 \right\} + \frac{1}{320} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^4 \left\{ 3 \left(\frac{z}{h}\right)^4 - 40 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 96 \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{15120} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^6 \left\{ 3 \left(\frac{z}{h}\right)^6 - 84 \left(\frac{z}{h}\right)^4 + 448 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 271 \right\} - \frac{3}{64} \lambda_0^2 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} \right] \sin \vartheta \\ + \frac{1}{4} \lambda_0 \left[ 3 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ 4 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 5 \right\} + \frac{1}{1260} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^2 \left\{ 168 \left(\frac{z}{h}\right)^4 - 35 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 3314 \right\} \right] \sin 2\vartheta \\ + \frac{1}{256} \lambda_0^2 \left[ 81 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-4} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} \left\{ 243 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 288 \right\} \right] \sin 3\vartheta \\ + \frac{27}{4096} \lambda_0^3 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} \sin 4\vartheta \quad ) \quad \dots\dots\dots (3.69)$$

さらに、圧力は次式で表される。

$$\frac{p}{\rho g_h} = 1 - \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \lambda_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^2 \left\{ \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1 \right\} + \frac{1}{24} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^4 \left\{ \left(\frac{z}{h}\right)^4 - 6 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 5 \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{720} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^6 \left\{ \left(\frac{z}{h}\right)^6 - 15 \left(\frac{z}{h}\right)^4 + 75 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 61 \right\} \right] \cos \vartheta + \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left[ 3 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} + 2 \left\{ 6 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 5 \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{1260} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^2 \left\{ 2520 \left(\frac{z}{h}\right)^4 - 2520 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 1907 \right\} - \frac{27}{128} \lambda_0^2 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-6} \right] \cos 2\vartheta \\ + \frac{1}{512} \lambda_0^2 \left[ 27 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-4} + \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} \left\{ 243 \left(\frac{z}{h}\right)^2 - 198 \right\} \right] \cos 3\vartheta + \frac{27}{2048} \lambda_0^4 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-6} \cos 4\vartheta \\ - \frac{1}{8} \lambda_0^2 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^2 \left(\frac{z}{h}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (3.70)$$

以上、式 (3.24) のせつ動解を第4次近似解まで求め、その表示を行った。この理論では、第2章で述べたクノイド波理論と同様の手法を用いて、線形長波を基準にしたせつ動法による展開が行われているが、得られた解の形はむしろ Stokes 波理論に類似している。事実、 $(2\pi h/L)$  を展開パラメータとして、微小振幅波理論による波速の表示式を級数展開すれば、

$$c = \left( \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \right)^{1/2} = \sqrt{g_h} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^2 + \frac{29}{360} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^4 - \frac{55}{3024} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^6 + \dots \right\} \\ \dots\dots\dots (3.71)$$

となるので、式 (3.67) との比較からして、ここで述べた理論は Stokes 波理論の分散項を  $(2\pi h/L)$  によって展開した形をしていることがわかる。しかしながら、Stokes 波理論では、水深を無限大に近づ

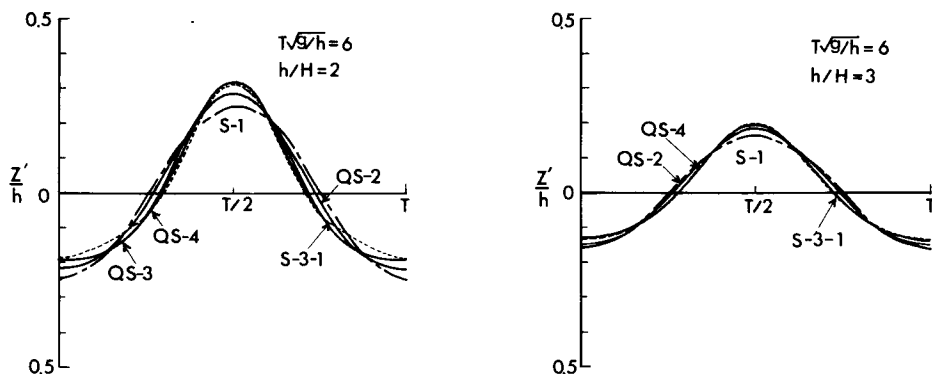
けて深水波の表示を得ることができるのに対して、この理論では水深が増すに従って、分散項に対する近似が十分でなくなるため、近似解の収束性が悪くなって発散してしまう。一方、逆に  $h/L$  をゼロに近づけた場合には、式 (3.67) が  $(9/64) \lambda_0^2 (2\pi h/L)^{-2}$  の項を含むために同様に発散してしまい、クノイド波理論に見られるような孤立波への移行は、この理論では不可能である。このように、第2節において示した解の形から、この理論はクノイド波理論と Stokes 波理論の中間的特性を持つと推測されるが、その解の表示はむしろ Stokes 波理論に類似していることから、この理論で表される波を著者は擬 Stokes 波と呼ぶことにする。

### 第3節 擬 Stokes 派の特性

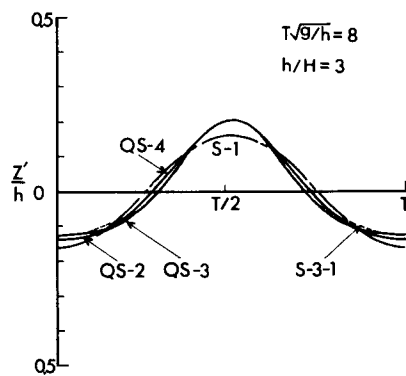
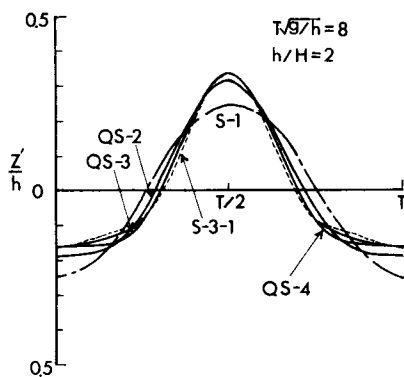
前述した擬 Stokes 波理論は、クノイド波理論と同様に、水面変動に関する方程式を基礎式とし、そのせつ動解を求めることによって展開されており、すでに示したようにその解は Stokes の波速の定義を用いることなく決定されている。また、第1次近似式が線形化された K-dV 方程式と一致し、せつ動解は三角関係で表示されているので、クノイド波理論とは若干異った特性を持つと考えられる。しかし、同一の流体力学の基礎方程式を浅海の条件で解いて得られた波理論であるので、その適用範囲は必然的に共通的な範囲が得られるはずであるが、前述したようにその取扱いから擬 Stokes 波理論の方がより沖側に適用可能であろうと想像される。したがって、ここでは、擬 Stokes 波理論の近似解の収束性を明らかにするとともに、新しいクノイド波理論および従来の Stokes 波理論との比較から、その適用性について考察する。

#### (1) 波 形

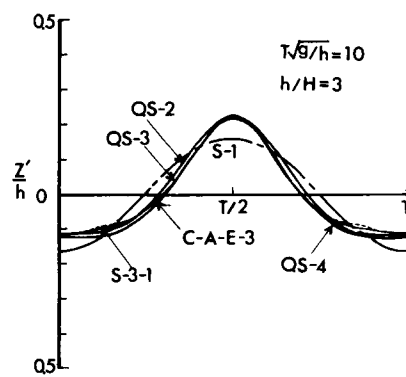
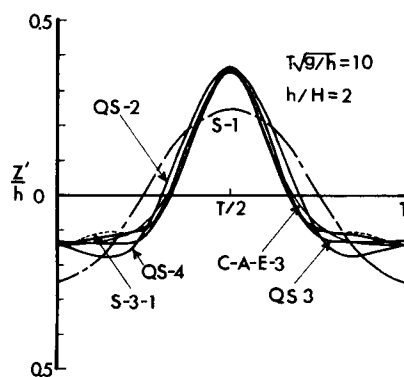
擬 Stokes 波においては、Stokes 波と同様、高次の周波数成分が非線形性の増大とともに卓越してくるために、波形に関する微小振幅波との相違が顕著になり、2次波の発生が見られる。ここでは、近似解による波形の相違を明らかにし、また新しいクノイド波および従来の Stokes 波との比較を行い、波形に関する擬 Stokes 波理論の特性を考察する。図-3.1 は、これらの各理論による波形の比較を  $T\sqrt{g/h}=6$  より 30 までの範囲で  $h/H=2$  および 3 に対して示したもので、図中 QS-1, QS-2, QS-3 および QS-4 はそれぞれ擬 Stokes 波理論の第1次、第2次、第3次および第4次近似解を示し、C-A-E-3



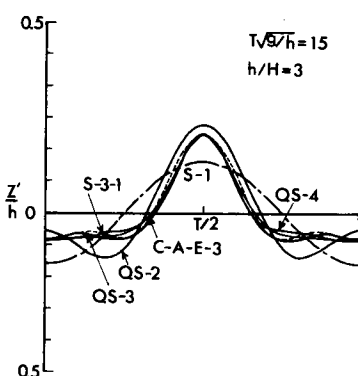
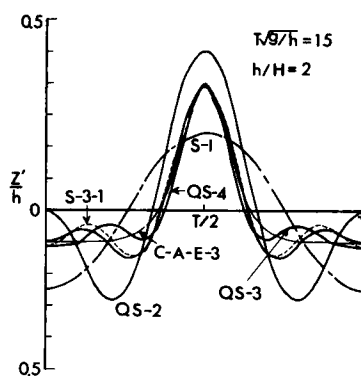
(a)



(b)

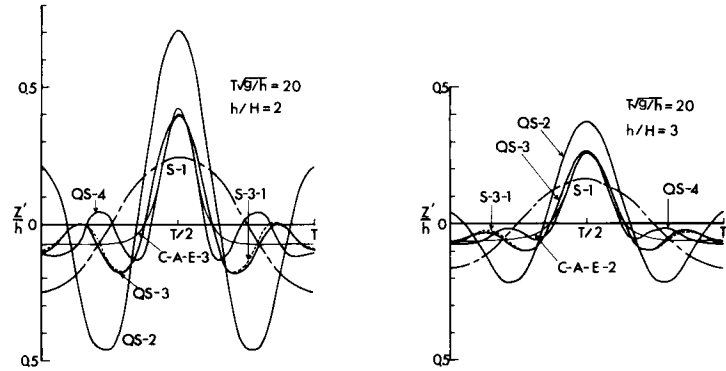


(c)

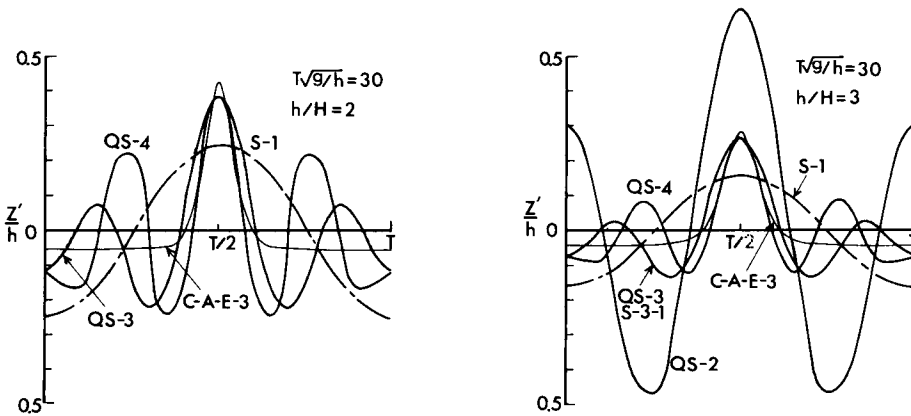


(d)

は前章で示したクノイド波の第3次近似解であり、さらにS-3-1はStokesの波速の第1定義を用いたStokes波理論の第3次近似解によるものを示す。



(e)



(f)

図-3.1 擬 Stokes 波の波形の特性とクノイド波および従来の Stokes 波の波形との比較

なお、図中の位相はすべて微小振幅波のものにそろえるために、波の谷を  $t = 0$  および波の峯を  $t = T/2$  の位相で与えたので、高周波成分が卓越してくるに従って、波の峯が異常に増大する結果となっている。

これから、波形の近似解による相違については、 $T\sqrt{g/h} = 6$  において最も小さく、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに顕著になることがわかる。また、 $T\sqrt{g/h} = 15$  において2次波の発生が見られるようになり、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに高次の周波数成分が卓越してくることがわかる。しかしながら、こうした高周波成分は、高次近似解に進むに従って平滑化され、擬 Stokes 波の波形はクノイド波の波形に収束する傾向を示していることから、かような2次波の発生は波の非線形性の卓越による結果ではなく、近似解の収束性の悪化によるものであることがわかる。ついで、Stokes 波との対応に関しては、QS-3が良く対応しており、S-3-1およびQS-3はいずれも第3次近似であることから、波形に関しては擬 Stokes 波と Stokes 波がよく対応することがわかる。さらに、クノイド波との対応については、 $T\sqrt{g/h} = 10$  付近においてよく対応しているが、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに、その相違が顕著になることから、擬 Stokes 波の特性が Stokes 波のそれに近いことがわかるであろう。

## (2) 波 速

ここでは、新しいクノイド波および Stokes 波との波速に関する比較を行って、擬 Stokes 波の波速の特性を考察する。従来の Stokes 波については、波速の定義が必要となることから、Stokes の波速の第 1 および第 2 定義を用いた第 3 次近似解による波速をそれぞれ次式で示す。

$$\left(\frac{c}{\sqrt{gh}}\right)_I = \left\{ \frac{L}{2\pi h} \tanh \frac{2\pi h}{L} \right\}^{1/2} \left\{ 1 + \left(\frac{2\pi a}{L}\right)^2 \frac{\cosh(8\pi h/L) + 8}{8 \sinh^4(2\pi h/L)} \right\}^{1/2} \dots\dots (3.72)$$

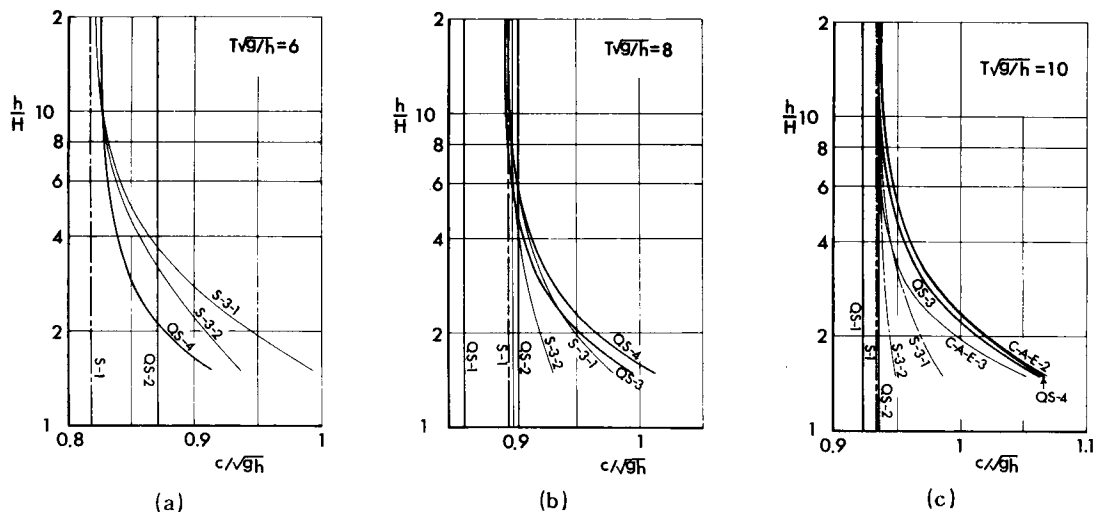
$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{\sqrt{gh}}\right)_{II} = & \left\{ \frac{L}{2\pi h} \tanh \frac{2\pi h}{L} \right\}^{1/2} \left[ \left\{ 1 + \left(\frac{2\pi a}{L}\right)^2 \frac{\cosh(8\pi h/L) + 8}{8 \sinh^4(2\pi h/L)} \right\}^{1/2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi a}{L}\right)^{-1} \coth \frac{2\pi h}{L} \right] \dots\dots\dots (3.73) \end{aligned}$$

ここに、 $(2\pi a/L)$  は次式の 3 次式の正の実根として与えられる。

$$\frac{3}{4} \left(\frac{2\pi a}{L}\right)^3 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-1} \left\{ \frac{\cosh^6(2\pi h/L) + 1}{\sinh^6(2\pi h/L)} \right\} + 2 \left(\frac{2\pi a}{L}\right) \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-1} - \frac{H}{h} = 0 \dots (3.74)$$

図-3.2 は、擬 Stokes 波理論による第 1 次、第 2 次、第 3 次および第 4 次近似解、新しいクノイド波理論の第 2 次および第 3 次近似解、式 (3.72) および (3.73) で示した Stokes 波理論の第 3 次近似解、および微小振幅波理論による結果を示したものである。また、図中の記号については、微小振幅波および波速の第 2 定義を用いた Stokes 波をそれぞれ示す S-1 および S-3-2 の他はいずれも図-3.1 に示したものと同一である。

まず、擬 Stokes 波理論の近似解の収束性については、 $T\sqrt{g/h}=8$  から 30 までの範囲において第 4 次近似解までではあるが、一様な収束性を示し、近似解の収束性が良好であることがわかる。ところで、波速に対する非線形効果が現われるのは、波形の場合と異なり、第 3 次近似解からであり、第 4 次近似解に



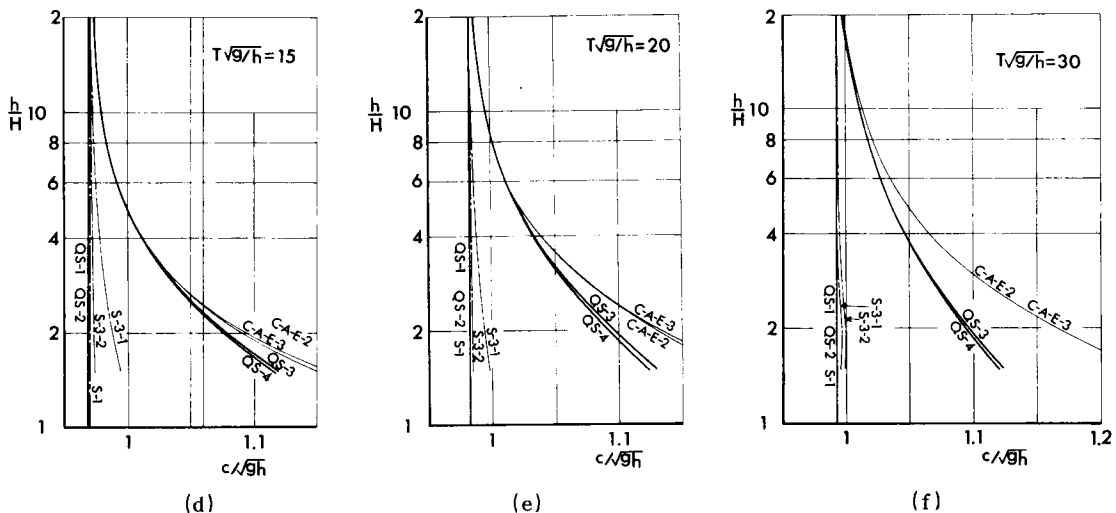
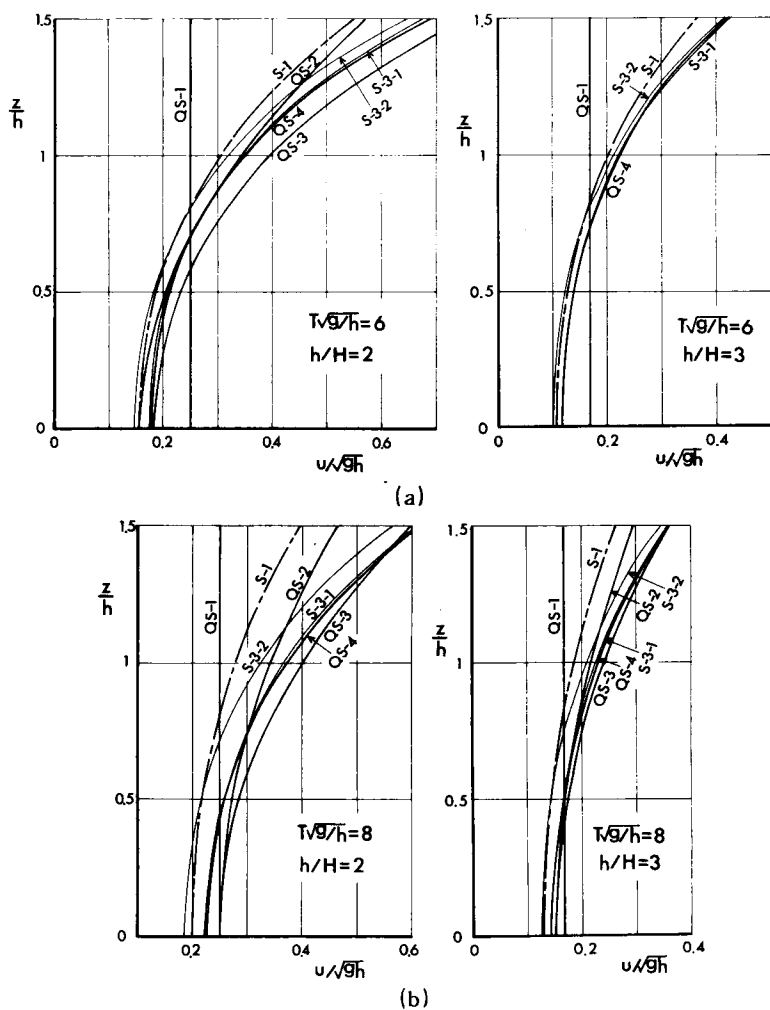
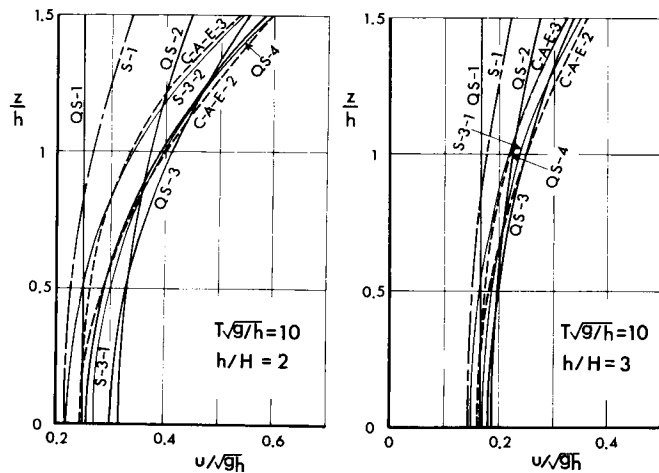


図-3.2 波速に関するクノイド波および Stokes 波との比較

において十分に収束した結果であるとは言い難いことも事実である。つきに、Stokes 波理論との対応については、波形の場合と異なり、 $T\sqrt{g/h}=8$  付近において最も良好であり、 $T\sqrt{g/h}=6$  および  $T\sqrt{g/h} \geq 15$  ではその相違が顕著になり、Stokes 波理論との相違が明らかとなっている。また  $T\sqrt{g/h} \geq 15$  では、QS-1 は S-1 とよく対応しており、これから分散性に対する近似は、 $T\sqrt{g/h} \geq 15$  では第 1 次近似解で十分であることがわかる。さらに、クノイド波理論との比較では、 $T\sqrt{g/h}=10 \sim 15$  の範囲において良く対応しており、擬 Stokes 理論はクノイド波理論の三角関数による展開



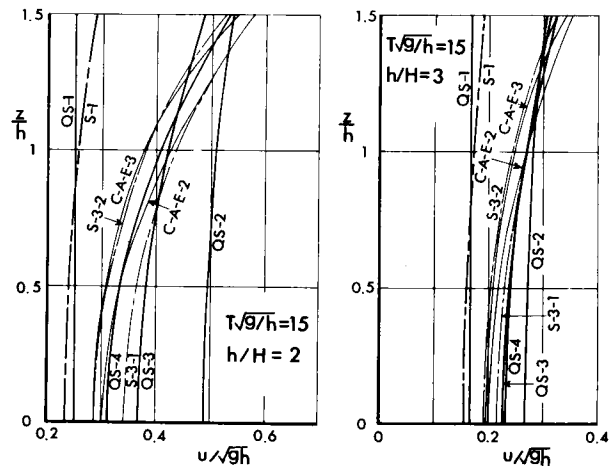
の特性を持つことがこれからもわかる。しかしながら、 $T\sqrt{g/h} > 15$ ではその相違が増大して行くことから、擬 Stokes 波の非線形性に対する近似が  $T\sqrt{g/h} > 15$ では十分でなくなってくるのがわかる。また、これらのことから、擬 Stokes 波理論は Stokes 波理論とクノイド波理論の中間的領域で適用される理論であるといえよう。



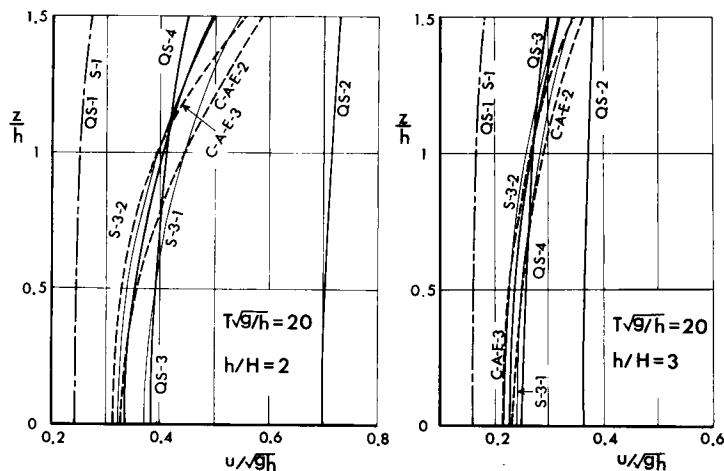
(c)

### (3) 水平水粒子速度

ここでは、擬 Stokes 波の水平水粒子速度の鉛直分布の特性を考察する。図-3.3は、波速の場合と同様な比較を示したもので、図中の記号も図-3.2と同じである。なお、S-3-1およびS-3-2で示されるStokes波の水平水粒子速度は、それぞれ次式で表される。



(d)



(e)



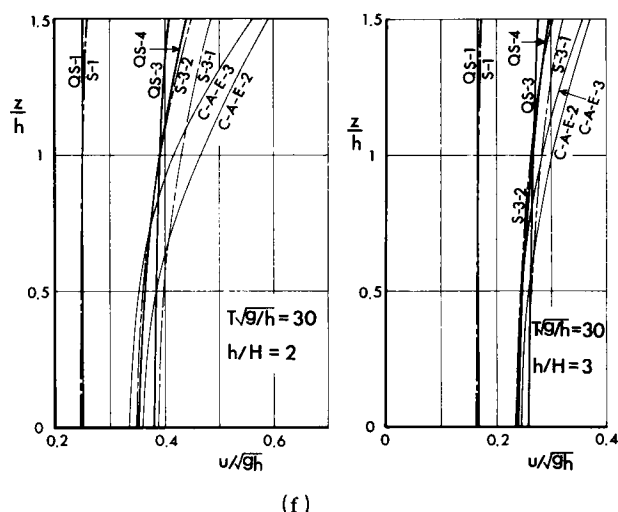


図-3.3 擬 Stokes 波の水平水粒子速度の鉛直分布と  
クノイド波および Stokes 波との比較

$$\left(\frac{u}{\sqrt{gh}}\right)_I = \left(\frac{c}{\sqrt{gh}}\right)_I \left\{ \left(\frac{2\pi a}{L}\right) \frac{\cosh 2\pi(h+z)/L}{\sinh 2\pi h/L} \cos \theta + 3\left(\frac{2\pi a}{L}\right)^2 \frac{\cosh 2\pi(h+z)/L}{\sinh^4 2\pi h/L} \cos 2\theta \right. \\ \left. + \frac{3}{8} \left(\frac{2\pi a}{L}\right)^3 \frac{11-2 \cosh 4\pi h/L}{\sinh^7 2\pi a/L} \cosh \frac{2\pi}{L}(h+z) \cos 3\theta \right\} \quad \dots\dots\dots (3.75)$$

$$\left(\frac{u}{\sqrt{gh}}\right)_{II} = \left(\frac{c}{\sqrt{gh}}\right)_{II} \left\{ \left(\frac{2\pi a}{L}\right) \frac{\cosh 2\pi(h+z)/L}{\sinh 2\pi h/L} \cos \theta + 3\left(\frac{2\pi a}{L}\right)^2 \frac{\cosh 2\pi(h+z)/L}{\sinh^4 2\pi h/L} \cos 2\theta \right. \\ \left. + \frac{3}{8} \left(\frac{2\pi a}{L}\right)^3 \frac{11-2 \cosh 4\pi h/L}{\sinh^7 2\pi a/L} \cosh \frac{2\pi}{L}(h+z) \cos 3\theta - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi a}{L}\right)^2 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-1} \right. \\ \left. \coth \frac{2\pi h}{L} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.76)$$

これから、水平水粒子速度に関する擬 Stokes 波理論の近似解の収束性は、波形の場合と同様な傾向を示し、 $T\sqrt{g/h}=6$  において最も良好であって、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに悪くなるが、 $T\sqrt{g/h}=6$  から 30 の範囲ではほぼ一様な収束性を示すことがわかる。このように、 $T\sqrt{g/h}=6$  において最も良好な収束性を示す点から、水平水粒子速度の近似解は波形と対応した特性を持つことおよび非線形性に対する依存度が波速および水平水粒子速度では異なっていることがわかる。また、近似解の特性については、QS-1 では鉛直分布が生じず、 $T\sqrt{g/h}$  の増大によって波の長波性が強くなると、S-1 とよく対応するようになり、波速の場合と同様に、分散性に対する近似は、 $T\sqrt{g/h} \geq 15$  では第 1 次近似解で十分であることがわかる。ついで、Stokes 波との対応については、 $T\sqrt{g/h}=6$  から 30 の範囲において QS-4 と S-3-1 および S-3-2 との対応が良好であり、波形の場合に QS-3 と S-3-1 とがほぼ対応していたこととの相違が現われている。さらに、クノイド波との対応については、波形および波速の場合と同様、 $T\sqrt{g/h}=10$

付近において最もよく対応し、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともにその対応は悪くなり、相違が増大していくことがわかる。そして、 $T\sqrt{g/h} > 15$  で対応が十分でなくなる傾向は、波形および波速の場合にも現われていることから、擬 Stokes 波の適用性が  $T\sqrt{g/h} \leq 15$  に限られていると言えよう。

#### (4) エネルギーおよびエネルギーフラックス

ここでは、擬 Stokes 波理論による波のエネルギーおよびエネルギーフラックスの特性について考察する。まず、単位面積当りの擬 Stokes 波の位置エネルギーは、次式で表される。

$$\begin{aligned}\frac{E_p}{\rho g h^2} &= \frac{1}{\rho g h^2 T} \int_0^T \int_h^{h+z'} \rho g z dz dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \{ \epsilon^4 \eta_1^2 + 2 \epsilon^5 \eta_1 \eta_2 + \epsilon^6 (\eta_2^2 + 2 \eta_1 \eta_3) + \epsilon^7 (2 \eta_1 \eta_4 + 2 \eta_2 \eta_3) \} dt + O(\epsilon^8) \\ &= \frac{\lambda_0^2}{16} \left[ 1 + \frac{3}{64} \lambda_0^2 \left\{ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + 4 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} + \dots \right] \dots\dots\dots (3.77)\end{aligned}$$

つぎに、単位面積当りの運動エネルギーは、次式のようにになる。

$$\begin{aligned}\frac{E_k}{\rho g h^2} &= \frac{1}{\rho g h^2} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \frac{\rho}{2} (u^2 + w^2) dz dt \right. \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \left\{ \epsilon^4 \eta_1^2 + \epsilon^5 \left( \frac{2}{3} \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} - 2 c_0 \eta_1^2 + \frac{1}{3} \eta_{1\sigma}^2 \right) + \epsilon^6 \left( \eta_2^2 + \frac{2}{15} \eta_{1\sigma\sigma}^2 + \frac{7}{3} c_0^2 \eta_1^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4}{3} c_0 \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} - 2 c_1 \eta_1^2 + \frac{4}{15} \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{4}{15} \eta_{1\sigma} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} \right) + \epsilon^7 \left( 6 \eta_1^2 \eta_2 - 2 c_2 \eta_1^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4}{3} c_1 \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} + 6 c_0 c_1 \eta_1^2 - 6 c_0^3 \eta_1^2 + \frac{34}{15} \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{2}{3} c_0 \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{7}{3} c_0^2 \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \eta_2 \eta_3 + \frac{2}{3} \eta_2 \eta_{2\sigma\sigma} - 2 c_0 \eta_2^2 + \frac{34}{15} \eta_{1\sigma\sigma} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \frac{8}{30} c_0 \eta_{1\sigma\sigma}^2 + \frac{1}{3} \eta_{2\sigma}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{17}{315} \eta_{1\sigma\sigma\sigma}^2 + c_0^2 \eta_{1\sigma}^2 - \frac{1}{3} c_0^2 \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} - \frac{2}{3} c_1 \eta_{1\sigma}^2 + \frac{34}{315} \eta_{1\sigma} \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{8}{15} c_0 \eta_{1\sigma} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} \right) \right\} dt \\ &\quad + O(\epsilon^8) \\ &= \frac{\lambda_0^2}{16} \left[ 1 + \frac{191}{3780} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{3}{64} \lambda_0^2 \left\{ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + 7 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} + \dots \right] \dots\dots\dots (3.78)\end{aligned}$$

以上より、単位面積当りの波の全エネルギーは、次式のようにになる。

$$\frac{E_t}{\rho g h^2} = \frac{E_p + E_k}{\rho g h^2}$$

$$= \frac{\lambda_0^2}{16} \left[ 2 + \frac{191}{3780} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{3}{64} \lambda_0^2 \left\{ 6 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + 11 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} + \dots \right] \quad (3.79)$$

さらに、エネルギーフラックスは、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{W}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} &= \frac{1}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} \left\{ -\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \rho \phi_t \phi_x dz dt \right\} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \varepsilon^4 \eta_1^2 + \varepsilon^5 (-c_0 \eta_1^2 + 2 \eta_1 \eta_2 + \frac{2}{3} \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma}) + \varepsilon^6 (-\frac{2}{3} c_0 \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} - c_1 \eta_1^2 + c_0^2 \eta_1^2 \right. \\ &\quad + \eta_2^2 + \frac{2}{15} \eta_{1\sigma\sigma}^2 + \frac{4}{15} \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma}) + \varepsilon^7 (6 \eta_1^2 \eta_2 - c_2 \eta_1^2 - \frac{2}{3} c_1 \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} + 2 c_0 c_1 \eta_1^2 \\ &\quad - 3 c_0^3 \eta_1^2 + \frac{34}{315} \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{2}{5} c_0 \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{2}{3} c_0^2 \eta_1 \eta_{1\sigma\sigma} + 2 \eta_2 \eta_3 + \frac{2}{3} \eta_2 \eta_{2\sigma\sigma} \\ &\quad \left. + c_0 \eta_2^2 - \frac{37}{630} \eta_{1\sigma\sigma} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} - \frac{2}{15} c_0 \eta_{1\sigma\sigma}^2) \right\} dt + O(\varepsilon^8) \\ &= \frac{\lambda_0^2}{8} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{5}{432} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{9}{64} \lambda_0^2 \left\{ \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + \frac{3}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} + \dots \right] \\ &\dots\dots\dots (3.80) \end{aligned}$$

一方、Stokes 波の第3次近似解によれば、波のエネルギーおよびエネルギーフラックスなどは、それぞれ次式で与えられている<sup>7)</sup>。

$$\frac{E_p}{\rho g h^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left\{ 1 + \left( \frac{\pi a}{L} \right)^2 \frac{\cosh^2 2\pi h/L (\cosh 4\pi h/L + 2)^2}{4 \sinh^6 2\pi h/L} \right\} \dots\dots\dots (3.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_k}{\rho g h^2} &= \frac{1}{4} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left\{ 1 + \left( \frac{2\pi a}{L} \right)^2 \frac{\cosh 8\pi h/L + 8}{8 \sinh^4 2\pi h/L} \right\} \left\{ 1 + \left( \frac{2\pi a}{L} \right)^2 + \left( \frac{\pi a}{L} \right)^2 \frac{\cosh 4\pi h/L + 2}{2 \sinh^4 2\pi h/L} \right\} \\ &\dots\dots\dots (3.82) \end{aligned}$$

$$\frac{W}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} = \left( \frac{E_p}{\rho g h^2} + \frac{E_k}{\rho g h^2} \right) \frac{c_g}{\sqrt{g h}} \dots\dots\dots (3.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_g}{\sqrt{g h}} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{L}{2\pi h} \tanh \frac{2\pi h}{L} \right\}^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{4\pi h/L}{\sinh 4\pi h/L} + \left( \frac{2\pi a}{L} \right)^2 \frac{1}{32 \sinh^4 2\pi h/L} \left\{ 5 \left( 8 \cosh^4 \frac{2\pi h}{L} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 8 \cosh^2 \frac{2\pi h}{L} + 9 \right) - \frac{12\pi h/L}{\sinh 4\pi h/L} \left( 8 \cosh^4 \frac{2\pi h}{L} + 16 \cosh^2 \frac{2\pi h}{L} - 3 \right) \right\} \right] \dots (3.84) \end{aligned}$$

以下では、以上示した擬 Stokes 波のエネルギーおよびエネルギーフラックスの特性を、式 (3.81)、(3.81)、(3.82) および (3.84) で示した Stokes 波の結果および第2章で示したクノイド波の結果との

比較において考察する。

まず、位置エネルギーについて述べる。図-3.4は、微小振幅波の位置エネルギーで無次元化した上述の各理論の位置エネルギーと  $h/H$  の関係を  $T\sqrt{g/h}$  をパラメータとして示したもので、図中の記号は図-3.2などと同じである。これから、擬 Stokes 波の近似解の収束性は、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに良好になり、図-3.1に示した波形の場合と異った傾向を示すことがわかる。これは、すでに述べたように、位置エネルギーについても  $\epsilon$  の多項式近似を行っているため、波形そのものと一義の関係が成立していないことによる。ついで、Stokes 波およびクノイド波との対応については、 $T\sqrt{g/h}=1.0$ において最も良く、 $T\sqrt{g/h}=10$

からの増減とともに悪くなる。このように、クノイド波との対応は  $T\sqrt{g/h}>10$ では十分でなくなり、擬 Stokes 波の非線形性に対する近似が不十分であることがわかるが、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに無次元エネルギーが減少し、波形と同様微小振幅波との相違が増大する傾向を示すことから、基本的にはクノイド波と対応した特性を持つことが理解される。

つぎに、運動エネルギーについて述べる。図-3.5は、図-3.4と同様に、微小振幅波の運動エネルギーで無次元化したものを示したものである。これから、擬 Stokes 波の近似解の収束性は、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに良好になるが、Stokes 波理論との対応については、反対の傾向にあることがわかる。また、クノイド波との対応については、位置エネルギーと同様な傾向が見られ、擬 Stokes 波はクノイド波と Stokes 波との中間的特性を持つことがわかる。

さらに、エネルギーフラックスについても、同様に微小振幅波のエネルギーフラックスを用いて無次元化したものを図示すれば、図-3.6のようになる。これから、この場合についても  $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに擬 Stokes 波の近似解の収束性は良くなるが、反対に Stokes 波およびクノイド波との対応については、運動エネルギーの場合と同様に、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに急速に悪くなり、特に Stokes 波との相違は顕著になってくることがわかる。また、 $T\sqrt{g/h}=6$  においても擬 Stokes 波と Stokes 波との相違が顕著になり、擬 Stokes 波の適用性は  $T\sqrt{g/h}<8$  で急速に

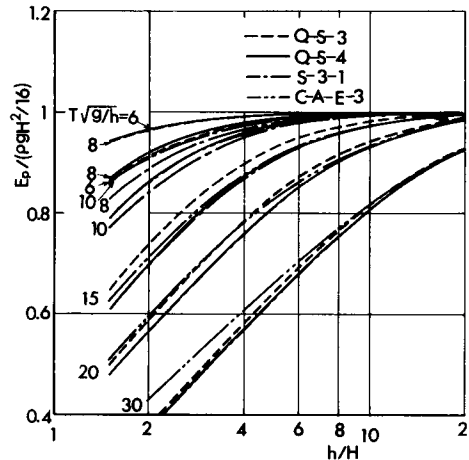


図-3.4 擬 Stokes 波の位置エネルギーとクノイド波および Stokes 波との比較

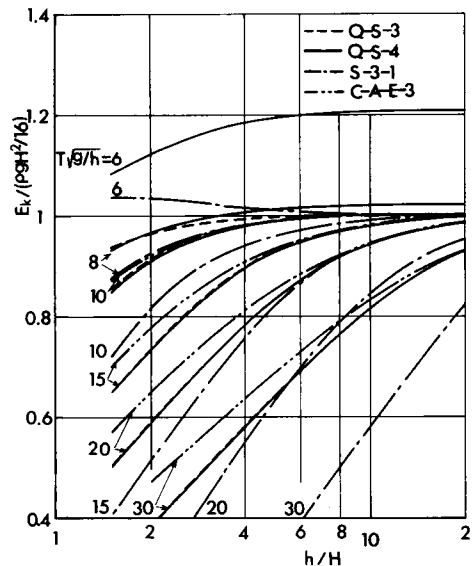


図-3.5 擬 Stokes 波の運動エネルギーとクノイド波および Stokes 波との比較

悪化することがわかる。

最後に、擬 Stokes 波のエネルギー輸送速度について考察する。擬 Stokes 波のエネルギー輸送速度を次式で定義する。

$$c_g = \frac{W}{E_p + E_k} \quad \dots\dots\dots (3.85)$$

また、Stokes 波の  $c_g$  は、すでに式 (3.84) で示したとおりである。図-3.8 は、式 (3.84) および (3.85) で表される  $c_g$  と、式 (2.157) のクノイド波の  $c_g$  とを示したもので、これから、擬 Stokes 波の収束性は  $T\sqrt{g}/h=8$  から 30 の範囲においてはほぼ一定であるが、Stokes

波との対応はあまりよくないことがわかる。これは、 $T\sqrt{g}/h \geq 10$  で S-3-1 の  $c_g/\sqrt{gh}$  が  $h/H$  が小さくなると減少することから、Stokes 波の適用性が  $T\sqrt{g}/h \geq 10$  の範囲では悪化するためと考えられる。一方、クノイド波との対応については、 $T\sqrt{g}/h=10$  で最もよく、 $T\sqrt{g}/h$  の増大とともに悪くなるが、微小振幅波との対応については逆に良くなることから、擬 Stokes とクノイド波の非線形性に対する近似解の相違が現われているものと言える。

#### (5) 質量輸送

擬 Stokes 波理論においては、新しいクノイド波理論と同様に、波速の任意性に伴う質量輸送の任意性の問題が解決されている。まず、Euler 座による質量輸送速度  $\bar{u}$  は、クノイド波理論の場合と同様に、式 (2.158) で定義され、次式のように表される。

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (3.86)$$

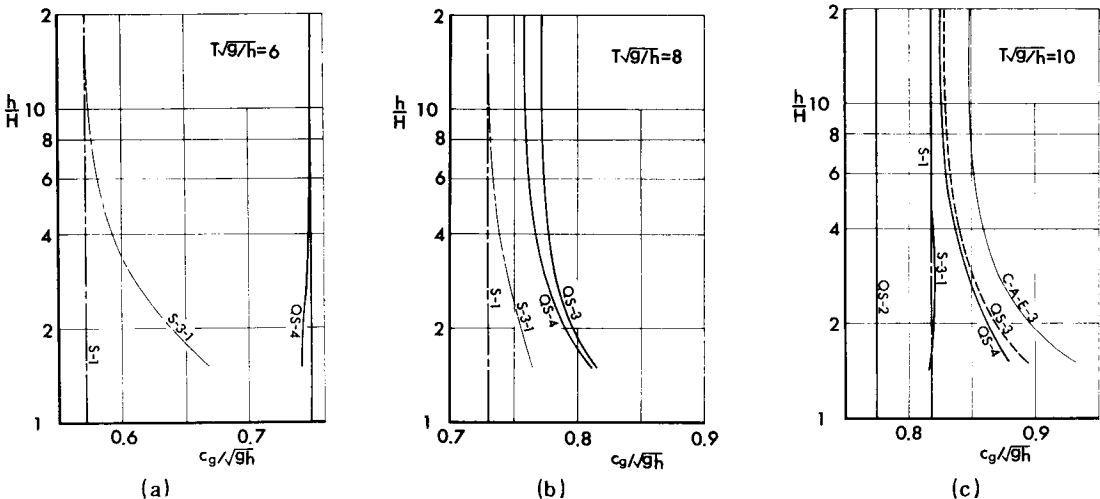


図-3.6 擬Stokes 波のエネルギーフラックスとクノイド波および Stokes 波との比較

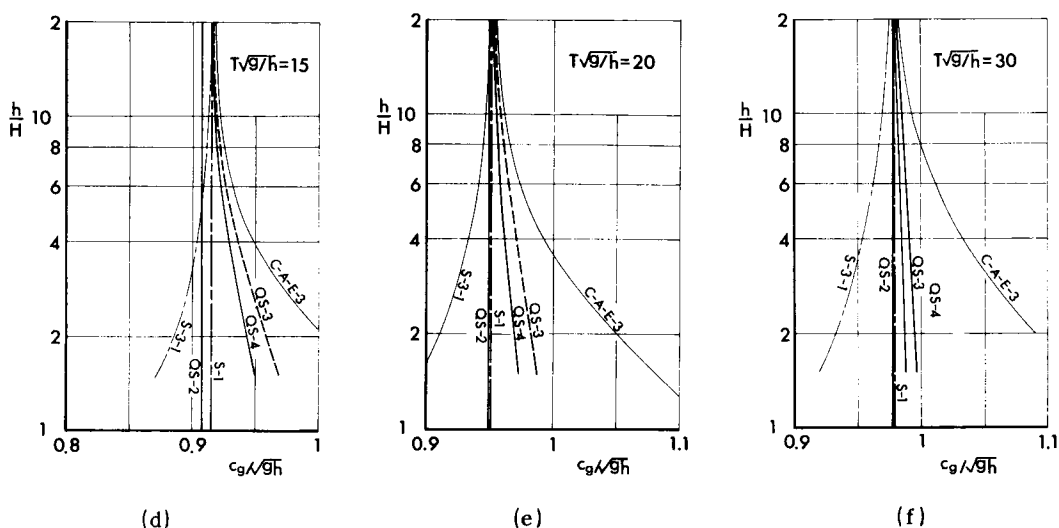


図-3.7 擬 Stokes 波のエネルギー輸送速度とクノイド波および Stokes 波との比較

これから、擬 Stokes 波においても質量輸送速度  $\bar{u}$  は、 $z$  に無関係であることがわかる。また、こうした質量輸送が生じる理由については、クノイド波の場合と同様に、高次の非線形効果によるものと考えられる。

図-3.8 は、擬 Stokes 波およびクノイド波による  $\bar{u}/\sqrt{gh}$  と  $h/H$  との関係を示したものである。これから、質量輸送速度に関する擬 Stokes 波の近似解の収束性は  $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに良好になるようであるが、クノイド波との対応については、 $T\sqrt{g/h}=10$  付近において最も良好であり、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに両者の相違も大きくなることがわかる。これは、図-3.2 に示した波速の特性と対応しており、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに、擬 Stokes 波の非線形性に対する近似が十分でなくなることを示しているものと言えよう。

つぎに、質量流束 (mass flux)  $Q$  は、次式のように表される。

$$\frac{Q}{\rho h \sqrt{gh}} = \frac{Q_1}{\rho h \sqrt{gh}} + \frac{Q_2}{\rho h \sqrt{gh}} \quad \dots\dots\dots (3.87)$$

ここに、

$$\frac{Q_1}{\rho h \sqrt{gh}} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \frac{\lambda^2}{16} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (3.88)$$

$$\frac{Q_2}{\rho h \sqrt{gh}} = \frac{1}{8} \lambda^2 \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (3.89)$$

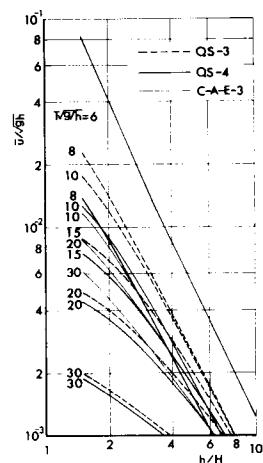


図-3.8 擬 Stokes 波の質量輸送速度

であり、これから式 (3.87) は次式となる。

$$\frac{Q}{\rho h \sqrt{gh}} = \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left\{ 3 - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (3.90)$$

ここで、 $Q_1$  および  $Q_2$  はそれぞれ第 2 章で示したものと同じであり、またその比も約  $1/2$  である。一方、Stokes の波速の第 1 および第 2 定義を用いた Stokes 波理論による質量流束は、それぞれ次式で表される。

$$\left( \frac{Q}{\rho h \sqrt{gh}} \right)_I = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi a}{L} \right)^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-1} \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right) \coth \frac{2\pi h}{L} \quad \dots\dots\dots (3.91)$$

$$\left( \frac{Q}{\rho h \sqrt{gh}} \right)_I = 0 \quad \dots\dots\dots (3.92)$$

これからも、Stokes 波の質量流束は、周知のように水面変動との相互作用のみによって生じ、波の谷より下では生じないことがわかる。図-3.9 は、擬 Stokes 波、クノイド波および Stokes 波による質量流束を、 $h/H$  および  $T\sqrt{g/h}$  との関係で示したものである。これから、近似による擬 Stokes 波の収束性は、図-3.8 に示した  $\bar{u}$  に関する結果と同様な傾向を示すことがわかる。ついで、クノイド波との対応についても、図-3.8 と同様、 $T\sqrt{g/h} = 10$  付近で最も良好であり、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともにその近似は十分でなくなる傾向を示している。つぎに、Stokes 波との対応では、

Stokes 波による結果は、全般的に擬 Stokes 波の結果よりも小さくなる傾向を示し、その相違は  $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに顕著になることがわかる。さらに、 $T\sqrt{g/h}$  が大きくなるとクノイド波と擬 Stokes 波および Stokes 波との相違が顕著になることから、波による質量輸送は当然のことながら非線形性に強く依存した現象であることがわかる。

つぎに、前章で述べたと同様の観点から、Lagrange 座標での質量輸送速度  $U_m$  を求める。このため、式 (2.166) を用いて Lagrange 座標での水粒子の速度ベクトル  $\mathbf{U}$  を Euler 座標での速度ベクトル  $\mathbf{u}$  で表示すれば、水平および鉛直速度成分  $U$  および  $W$  は、それぞれ次式のようになる。

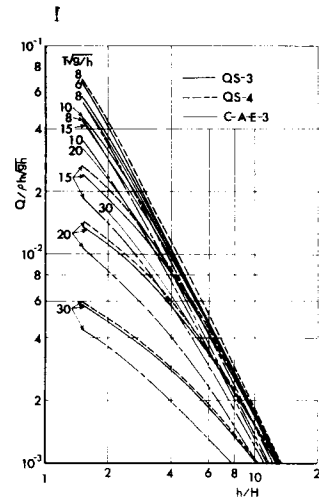
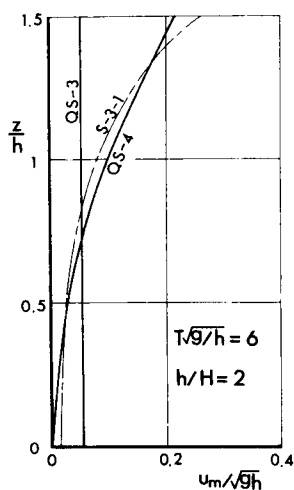


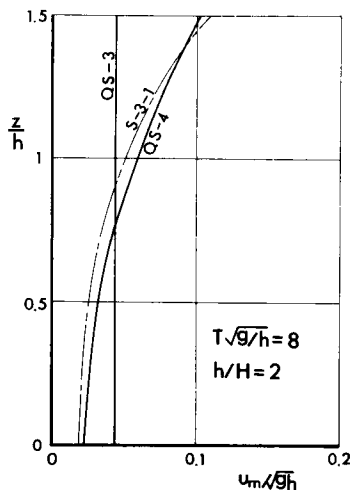
図-3.9 擬 Stokes 波の質量流束の特性

$$\begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{gh}} = & \frac{u}{\sqrt{gh}} + \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left\{ \frac{3}{64} \lambda_0^3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} (\sin 2\theta - \sin 2\theta_0) \sin \theta + \frac{3}{16} \lambda_0^3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right. \\ & (\sin \theta - \sin \theta_0) \sin 2\theta \left. \right\} + \frac{\lambda_0^2}{12} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} (\sin \theta - \sin \theta_0) \sin \theta \\ & + \frac{\lambda_0^2}{4} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left( \frac{z}{h} \right) (\cos \theta - \cos \theta_0) \cos \theta + \dots\dots\dots (3.93) \end{aligned}$$

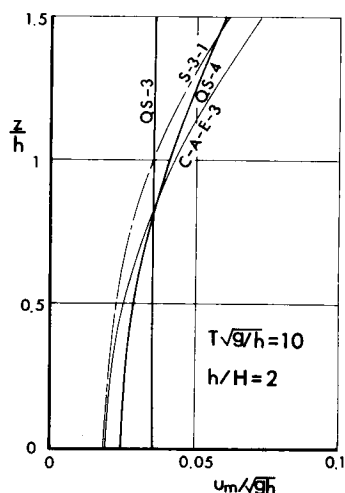
$$\begin{aligned}
\frac{W}{\sqrt{gh}} = & \sqrt{\frac{w}{gh}} + \frac{3}{64} \lambda_0^3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-1} \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left( \frac{z}{h} \right) \{ 2 \sin \theta (\cos 2\theta - \cos 2\theta_0) \\
& - \cos \theta (\sin 2\theta - \sin 2\theta_0) + 4 \sin 2\theta (\cos \theta - \cos \theta_0) - 8 \cos 2\theta (\sin \theta - \sin \theta_0) \} \\
& + \frac{\lambda_0^2}{12} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^3 \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left( \frac{z}{h} \right) \left[ \left( \frac{z}{h} \right)^2 \sin \theta (\cos \theta - \cos \theta_0) - 2 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \right. \\
& \left. \cos \theta (\sin \theta - \sin \theta_0) \right] \dots\dots\dots (3.94)
\end{aligned}$$



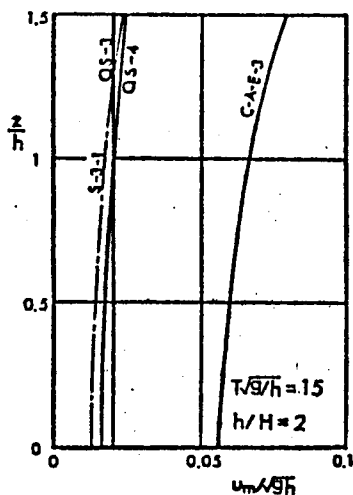
(a)



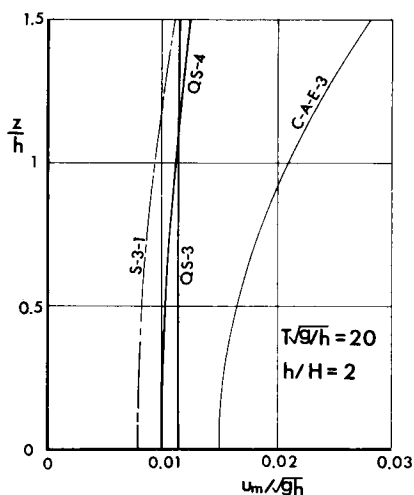
(b)



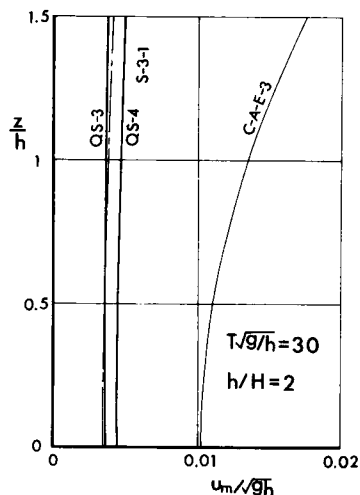
(c)



(d)



(e)



(f)

図-3.10 擬 Stokes 波の Lagrange 座標での管理輸送速度の鉛直分布 特性



ここに、 $\theta_0 = 2\pi h x_0 / L$ 、および  $x_0$  は初期位置である。

これから、質量輸送速度  $U_m$  は式 (3.93) に示した  $U$  の一周期平均速度として定義され、次式のようになる。

$$\frac{U_m}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} + \frac{1}{8} \lambda_0^2 \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right)^{-1} \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \right] \dots \quad (3.95)$$

一方、Stokes 波理論によれば、第 1 定義による  $U_m$  は、次式によって表される。

$$\left( \frac{U_m}{\sqrt{gh}} \right)_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi a}{L} \right)^2 \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right) \frac{\cosh 4\pi(h+z)/L}{(\sinh 2\pi h/L)^2} \dots \quad (3.96)$$

図-3.11 は、式 (3.95) および (3.96) でそれぞれ示した擬 Stokes 波および Stokes 波の  $U_m / \sqrt{gh}$  の鉛直分布の特性と  $T\sqrt{g/h}$  および  $h/H$  の関係を示したもので、比較のために式 (2.172) による新しいクノイド波の結果も示してある。これから、擬 Stokes 波の  $U_m$  の鉛直分布は、Stokes 波のものとよく対応していることは特記すべきであろう。そして、波形の場合には QS-3 と S-3-1 が対応していたのに反して、この場合には QS-4 と S-3-1 が対応し、擬 Stokes 波の近似の次数が Stokes 波のそれと必ずしも一致していないことがわかる。このような近似解の次数の問題はあるが、Lagrange 座標で考える限り、波による質量輸送は、擬 Stokes 波あるいは従来の Stokes 波のいずれを用いてもあまり大きな相違は生じないが、Euler 座標で考えれば、すでに示したように両者は全く相違することになる。また、クノイド波との対応については、両者の境界領域と考えられる  $T\sqrt{g/h} = 10$  付近でよく対応しているが、 $T\sqrt{g/h}$  の増大とともに擬 Stokes 波の  $U_m$  の方が急速に一樣分布になり、クノイド波との相違が顕著となってくる。こうした  $T\sqrt{g/h}$  の増大に伴って両者の相違が顕著になる傾向は、擬 Stokes 波の非線形性に対する近似が必ずしも十分でないことによるものであるが、 $U_m$  の鉛直分布が QS-4 および C-A-E-3 で初めて現われる点からすれば、擬 Stokes 波の第 4 次近似解はクノイド波の第 3 次近似解に対応していると言えよう。

#### (6) 極限波高

ここでは、前章と同様、Rankine-Stokes の極限波の条件を用いて擬 Stokes 波の極限波高を求める。波の峯における最大水粒子速度  $u_c$  は式 (3.66) および (3.68) より次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{u_c}{\sqrt{gh}} = & \frac{1}{2} \lambda_0 \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 (z_c^2 - 1) + \frac{1}{120} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 (5z_c^4 - 20z_c^2 + 12) \right. \\ & + \frac{1}{15120} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 (21z_c^6 - 420z_c^4 + 756z_c^2 - 272) \left. \right\} + \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left\{ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + \frac{3}{2} (4z_c^2 - 1) \right. \\ & + \frac{1}{2520} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 (5040z_c^4 - 12600z_c^2 + 1877) \left. \right\} + \frac{3}{512} \lambda_0^3 \left\{ 9 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right. \\ & \left. (81z_c^2 - 43) \right\} + \frac{27}{2048} \lambda_0^4 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-6} \dots \quad (3.97) \end{aligned}$$

ここに、

$$z_c = 1 + \frac{1}{2} \lambda_0 + \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left\{ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + 2 + \frac{613}{1260} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} + \frac{9}{512} \lambda_0^3 \left\{ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \right. \\ \left. + 5 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} + \frac{27}{2048} \lambda_0^4 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-6} \quad \dots\dots\dots (3.98)$$

一方、波速は式(3.67)で示されており、この結果、前述のRankine - Stokesの極限波高の条件は、 $\lambda_0$ に関する高次方程式となり、これと前述した $(2\pi h/L)$ に関する条件式とを連立させて解くことにより、上述の条件に対応した $\lambda_0$ および $(2\pi h/L)$ が求められる。したがって、これらの $\lambda_0$ および $(2\pi h/L)$ を次式に代入することによって、極限波高 $(H/h)_{max}$ が決定される。

$$\left( \frac{H}{h} \right)_{max} = \lambda_0 + \frac{9\lambda_0^3}{1024} \left\{ \frac{3}{4} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + 9 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.99)$$

以上は、第4次近似解による結果であるが、第3次近似についても同様にして $(H/h)_{max}$ が計算される。こうして計算された $(H/h)_{max}$ の $T\sqrt{g/h}$ に対する特性を示したものが図-3.11であり、比較のためクノイド波理論の第3次近似解による同様な結果も示した。すでに述べた擬Stokes波理論の特性から、この理論の適用領域は、およそ $T\sqrt{g/h}=8\sim 10$ の範囲であるように考えられるが、いうまでもなく詳細な実験結果との比較でさらに検討すべきことは言うまでもない。しかし、この場合も、 $T\sqrt{g/h}=8\sim 10$ 付近では、QS-3、QS-4およびC-A-E-3はかなり対応していることがわかる。しかしながら、QS-3およびQS-4のいずれも $T\sqrt{g/h}$ の増大とともに一様に増大し、クノイド波理論におけるような孤立波への収束傾向が見られない。また、

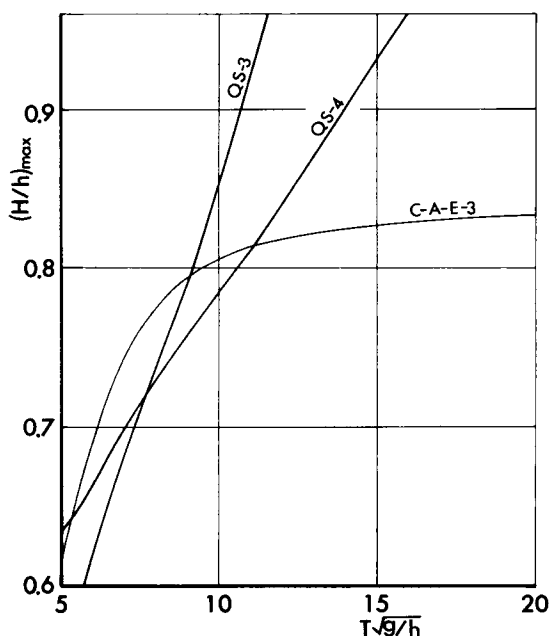


図-3.11 擬Stokes波の極限波高の表示

$T\sqrt{g/h}$ の減少に対しても $T\sqrt{g/h}=5$ までしか示していないが、 $(H/h)_{max}$ は一様に減少する傾向を示し、一定値に収束する傾向は見られない。さらに、QS-3による計算結果はQS-4のそれと $T\sqrt{g/h}=8$ 付近で交叉して、QS-4に収束する傾向は見られない。このことはQS-4の結果で極限波高を決定することにはなお問題があるようであり、とくにこうした極限波高の議論には、さらに高次解を求め、 $(H/h)_{max}$ が一定値に収束することを示す必要があろう。

## 第4節 結 語

以上、著者は第3章において、クノイド波理論および Stokes 波理論の中間的特性を持ち、しかも Stokes の波速の定義を用いない有限振幅波理論として新しく擬 Stokes 波理論を試み、その特性を考察したが、各節ごとに得られた主要な結果を要約すれば、次のとおりである。

まず、第1節では、第2章で展開したクノイド波理論の適用範囲より沖側で用いられる有限振幅波理論の展開の必要性とその考え方を述べた。

第2節では、まず通減せつ動法の若干の一般化を行い、任意の分散項と非線形項との比を用いて、水面変動で表した有限振幅波の基礎方程式の誘導が可能であることを示した。ついで、第1節で示した考え方に従って、 $\varepsilon$  のオーダーだけ分散性が卓越した場合に対して、水面変動に関する方程式を誘導した。第2章と同様に、水面変動に対して定形波を仮定したその波動解を求め、三角関係で表示された波の理論を第4次近似解まで誘導した。この理論から波形、波速、水粒子速度および圧力に関する数学的表示を与えた。そして、この理論の近似解が従来の Stokes 波理論の分散項を水深・波長比  $h/L$  で級数展開した形で表され、この理論がクノイド波理論よりもむしろ、Stokes 波理論に類似していることから、この波を新しく擬 Stokes 波と呼び、その取扱いを擬 Stokes 波理論ということにした。

第3節では、この擬 Stokes 波理論の波形、波速および水平水粒子速度に関する近似解の収束性を数値計算によって検討し、また前節で示したクノイド波理論および従来の Stokes 波理論との比較から、擬 Stokes 波の特性を考察した。さらに、波のエネルギー、エネルギーフラックス、質量輸送および極限波高についても数学的表示を与え、これらに関する近似解の収束性について検討を行い、これらの特性について考察した。その結果、波高・水深比  $H/h$  にもよるが、近似解の収束性は、波速および水平水粒子速度に関しては、無次元周期  $T\sqrt{g/h}=8$  から 30 の範囲において全体的に良好であるのに対し、波形に対しては、 $T\sqrt{g/h}$  が大きくなるに従って高周波成分が卓越して収束性も悪くなり、特に  $T\sqrt{g/h} \geq 20$  において、その傾向が顕著となることが明らかとなった。さらに、波のエネルギーおよびエネルギーフラックスに関しては、 $T\sqrt{g/h}=6$  付近においてその近似解の収束性がきわめて悪く、 $T\sqrt{g/h}$  が大きくなるに従って良好になるが、これは波の分散性の影響が大きいためであることが明らかとなった。また、質量輸送に関しては、これが本質的に波の非線形性に依存した現象であるので、その収束性は  $T\sqrt{g/h}=6$  から 30 の範囲において全体的に良好であるが、 $T\sqrt{g/h}$  の値が比較的大きい場合がもっとも良好であることが示された。このように、この近似解の収束性は、波形とエネルギーでは波の分散性および非線形性に対する依存度の相違もあって  $T\sqrt{g/h}$  に対して相反した傾向を示すなど、 $T\sqrt{g/h}=6$  から 30 の範囲において一様ではないが、 $T\sqrt{g/h}=8$  から 15 の範囲においては、全般的に良好な収束性を示すことが明らかとなった。

一方、クノイド波理論との対応については、波形、波速などいずれに関しても  $T\sqrt{g/h} \leq 15$  の領域において良好であることが確かめられた。特に、 $T\sqrt{g/h}=10$  付近では両者の相違はほとんど見られなく、同一の基礎方程式から得られた理論解の対応を確かめることができた。しかも、 $T\sqrt{g/h} > 15$  では近似解の収束性に関係なく両者の相違は顕著となり、非線形性に対する近似がクノイド波理論に比べて十分ではない

ことが明らかとなった。したがって、 $T\sqrt{g/h}=10$  から  $15$  の範囲においては、クノイド波理論の代りに擬 Stokes 波理論を用いることによって、計算の簡略化が可能になることを示した。また、従来の Stokes 波との対応については、 $T\sqrt{g/h}$  が小さくなると、擬 Stokes 波の分散性に対する近似が Stokes 波に比べて十分でないために両者の相違は増大し、また、 $T\sqrt{g/h}$  が大きくなると、逆に Stokes 波の非線形性に対する近似が擬 Stokes 波に比べて十分でないために両者の相違が増大することになるが、 $T\sqrt{g/h}=8$  付近では両者は良く対応することが明らかとなった。とくに、Lagrange 座標における質量輸送速度の鉛直分布は、この範囲においてほとんど一致し、 $T\sqrt{g/h}$  が大きくなるに従って、波の特性が Stokes 波から擬 Stokes 波さらにクノイド波に移行していくものと考えられた。以上のことから、擬 Stokes 波理論が従来の Stokes 波理論とクノイド波理論の中間的特性を持ち、その適用範囲は、波高・水深比  $H/h$  によるけれどもほぼ  $T\sqrt{g/h}=8$  から  $15$  であると考えられよう。

#### 参 考 文 献

- 1) 角谷豊彦：分散性媒質中の非線形波動，Nagare, Vol. 3, No. 2, 1971, pp 5-26.
- 2) Taniuti, T. and C.C. Wei : Reductive Perturbation in Nonlinear Wave Propagation, I, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 24, No.4, 1968, pp. 941-946.
- 3) 岩垣雄一・山口正隆：Stokes 波とクノイド波の適用限界について，第14回海岸工学講演会講演集，1967, pp. 8-16.
- 4) Stokes, G.G. : On the Theory of Oscillatory Waves, Trans. Cambridge, Phil. Soc., Vol. 8, 1847, pp. 197-229.
- 5) Tsuchiya, Y. and M. Yamaguchi : Some Consideration on Water Particle Velocities of Finite Amplitude Wave Theories, Coastal Engg. in Japan, Vol. 15, 1972, pp. 43-57.
- 6) Le Méhauté, B. and L.M. Webb : Periodic Gravity Waves over a Gentle Slope at a Third Order of Approximation, Proc. 9th Conference on Coastal Engineering, 1964, pp. 23-40.

## 第4章 一様流を伴う有限振幅波理論に関する研究

### 第1節 概 説

第2章および第3章では、沿岸海域における波浪の力学的特性を究明するために、流れのない場での有限振幅波の理論的研究を行った。しかしながら、沿岸海域においては、潮流や沿岸流をはじめ、河川流などの種々の流れが存在するため、波に及ぼす流れの影響を究明する必要がある。そこで、本章では、流れの存在する場での有限振幅波の特性を究明することを目的として、若干の基礎的な理論的研究を試みるに当たり、まず従来の研究について考察する。

流れのある場での波に関する研究は古くからなされてきたが、その最初の研究は、流れの上に発生する水面しょう乱の伝播速度と流れの特性との関係を明らかにするためになされた<sup>1)</sup>。その後、Boussinesq<sup>2)</sup>によってせん断流の場での波の特性に関する詳細な研究がなされた。Biésel<sup>3)</sup>は微小振幅波の波速および波長と流れの関係を明らかにし、Burns<sup>4)</sup>は同様な関係を線形長波の場合について確かめた。一方、Sarpkaya<sup>5)</sup>はせん断流中での進行波の安定条件および流れの諸特性が波の特性に及ぼす影響を明らかにするために、系統的な実験を行った。その結果、一定の流れの条件において、ただ一つの安定な波が存在することを示すとともに、せん断流に対しては波と流れとの重ね合わせは一般的に成立しないことを見出した。その後、せん断流中での波の安定条件の理論的研究が進められるようになり、まず Benjamin<sup>6)</sup>によるせん断流中での孤立波理論に関する研究が行われた。ついで、Velthuisenら<sup>7)</sup>によるせん断流中での微小振幅波の伝播特性に関する研究やせん断流の場での Korteweg-de Vries の方程式を用いて安定条件を導いた Freemanら<sup>8)</sup>による研究が発表された。さらに、波速に対して複素関数を定義して、その安定性の問題を扱う研究が Yih<sup>9)</sup>によってなされるなど引き続き数多くの研究が行われた。また、Betts<sup>10)</sup>および浜田<sup>11), 12)</sup>らによっても、種々の鉛直分布を持つ流れの場での有限振幅波の理論が展開され、最近では粘性効果を考慮した Poiseuille 流の場における有限振幅波に及ぼす流れの影響を明らかにする試みや、Freemanら<sup>8)</sup>によって導かれた基礎式から単に安定条件を求めるだけでなく、解析解を求める試み<sup>13), 14)</sup>などもなされてきた。そのほか、Ursell<sup>16)</sup>によるせん断流の場での造波の問題を扱った研究も行われた。

一方、流速が空間的に変化する場合には、流れの場における波の変形が主として対象となり、前述したような定常せん断流の場での安定条件を求める手法の適用は一般に困難となる。したがって、この場合には、波と流れの相互作用を無視したエネルギーフラックス法による取り扱い<sup>17)</sup>や、radiation stressを媒介とした波と流れの相互作用を考える Longuet-Higginsら<sup>18)</sup>の理論、また流れの場に存在する乱れの Reynolds stress によるエネルギー損失を考慮した岩崎ら<sup>19), 20)</sup>による理論などで示されたような取扱いが必要となろう。

以上述べたように、流れの場での波に関する研究は、流れが鉛直方向に流速分布を持つ場合や流速の鉛直分布は考慮しないが空間的に変化する場合に対して行われた。このうち、前者に対しては、波の安定性の条件および安定な場合における波と流れとの関係などが明らかにされ、後者に対しては radiation

stress および Reynolds stress を考慮した波の変形の計算が行われてきた。このように、これまでの研究では、主として流れの場での波の理論の誘導に関心がもたれてきたために、基礎式はきわめて複雑となり、一般に解析解の誘導を困難にしてきた。このために、前述のいずれの場合においても、いわゆる波の特性に及ぼす非線形項の効果の究明は通常きわめて困難になっている。こうしたことから、本章では、簡単のために流れを一樣流と仮定し、第2章および第3章で示した手法を用いて、一樣流を伴う有限振幅波の理論を展開し、波速および水平水粒子速度をはじめとする波の特性に及ぼす流れの影響を明らかにする。ついで、波と流れの共存系における波のエネルギーフラックスなどの保存量に及ぼす一樣流の流速の影響を明らかにする。

このために、まず第2節では、波の分散性および非線形性の平衡関係が一樣流の流速に関係なく成立するものとして、波と流れの共存系における基礎方程式に逓減せつ動法を適用し、水面変動に関する偏微分方程式を導く。これより、水面変動に対する定形波の仮定を用いて、一樣流を伴うクノイド波理論を第3次近似解まで展開する。ついで、第3節では、波の分散性が非線形性に対して卓越するが、両者の関係は流れに独立であるとして、逓減せつ動法を適用し、水面変動に関する偏微分方程式を導く。これを、前節と同様の仮定を用いて解くことにより、一樣流を伴う擬 Stokes 波理論を第4次近似解まで展開する。さらに、第4節では、第2節および第3節で導いた2つの有限振幅波理論の特性を波速、水平水粒子速度および極限波高に関して考察し、特にそれらに対する流れの影響を明らかにする。また、波の質量、運動量およびエネルギーなどの保存量について考察し、それぞれの保存量に対する流速および波の非線形性の影響を明らかにするつもりである。最後に第5節では、以上得られた結果をまとめて結語とする。

## 第2節 一樣流を伴うクノイド波理論

### (1) 波動方程式の誘導

#### a) 基礎方程式

いま流速を  $U$  とし、波による水平および鉛直水粒子速度をそれぞれ  $u$  および  $w$  とすれば、Euler の運動方程式は、連続方程式とともに次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (u+U)_t + (u+U)(u+U)_x + w(u+U)_z &= -\frac{p_x}{\rho} \\ w_t + (u+U)w_x + ww_z &= -\frac{p_z}{\rho} - g \\ (u+U)_x + w_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1)$$

ここで、波動の場は非回転運動と仮定し、つぎのように速度ポテンシャル  $\phi$  を定義する。

$$(u+U)_z - w_x = 0 \quad ; \quad u = \phi_x, \quad U = \phi_{0x}, \quad w = \phi_z \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

そうすれば、式(4.1)に式(4.2)を適用することによって、このときの Bernoulli 方程式は、次式のようなになる。

$$\phi_t + \int \phi_{0xt} dt + \frac{1}{2} \{ (\phi_x + \phi_{0x})^2 + \phi_z^2 \} + \frac{p}{\rho} + g(z-h) = \text{const} \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

この対象とする流れを定常流と考え、座標を図-4.1に示すようにとることにすれば、基礎方程式は次式で与えられる。

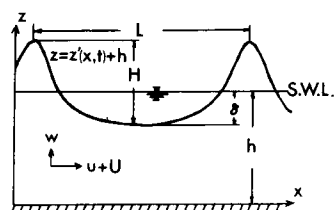


図-4.1 座標系と記号の説明

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 (\phi + \phi_0) &= 0 \\ \phi_t + \frac{1}{2} \{ (\phi_x + \phi_{0x})^2 + \phi_z^2 \} + g z' \Big|_{z=h+z'} &= \text{const} \\ z'_t + z'_x (\phi_x + \phi_{0x}) - \phi_z \Big|_{z=h+z'} &= 0 \\ \phi_z \Big|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.4)$$

さらに、式(2.5)で定義した無次元量に加えて、流速 $U$ を一定とし、ここで新たに次式で表される無次元量を定義する。

$$\phi_0^* = \frac{\phi_0}{h \sqrt{g h}}, \quad F_r = \frac{U}{\sqrt{g h}} \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

式(4.5)を用いて式(4.4)を書き換えると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 (\phi^* + \phi_0^*) \\ \phi_{t^*}^* + \frac{1}{2} \{ (\phi_{x^*}^* + F_r)^2 + \phi_{z^*}^{*2} \} + z'^* \Big|_{z^*=1+z'^*} &= \text{const} \\ z_{t^*}^* + z_{x^*}^* (\phi_{x^*}^* + F_r) - \phi_{z^*}^* \Big|_{z^*=1+z'^*} &= 0 \\ \phi_{z^*}^* \Big|_{z^*=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.6)$$

なお、自由表面での Bernoulli 方程式の右辺の定数項は左辺の定数項 $F_r^2/2$ に対応するものとし、元来 Bernoulli 定数に含まれている波動成分に対応した定数項は左辺の $\phi_{t^*}^*$ に含ませている。これが、ここで解くべき基礎方程式であり、以下では第2章と同様の手法を用いて上式より波動方程式を導く。

#### b) 基礎方程式の誘導

一様流の場合においても、波の非線形性および分散性の平衡関係は維持されるものとし、次式に示す変換を考える。

$$\xi = \epsilon^{1/2} \{ x^* - (1 + F_r) t^* \}, \quad \tau = \epsilon^{3/2} t^*, \quad \zeta = z^* \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

式(4.7)を用いて式(4.6)を書き換えると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
& \varepsilon \phi_{\xi\xi}^* + \phi_{\zeta\zeta}^* = 0 \\
& -\varepsilon^{1/2} \phi_{\xi}^* + \varepsilon^{3/2} \phi_{\tau}^* + \frac{1}{2} \{ \varepsilon \phi_{\xi}^{*2} + \phi_{\zeta}^{*2} \} + z'^* \Big|_{\zeta=1+z'^*} = 0 \\
& -\varepsilon^{1/2} z'_{\xi}^* + \varepsilon^{3/2} z'_{\tau}^* + \varepsilon z'_{\xi}^* \phi_{\xi}^* - \phi_{\zeta}^* \Big|_{\zeta=1+z'^*} = 0 \\
& \phi_{\zeta}^* \Big|_{\zeta=0} = 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.8)$$

これから明らかなように、基礎式に含まれている  $F_r \phi_{x^*}^*$  および  $F_r z'_{x^*}^*$  の相互作用項が、式(4.7)の変換によって消去され、式(4.8)には  $F_r$  の影響があらわにならないことがわかる。これより、次式に示すせつ動解

$$\left. \begin{aligned}
\phi^*(x^*, z^*, t^*) &= \varepsilon^{1/2} \{ \phi_1(\xi, \zeta, \tau) + \varepsilon \phi_2(\xi, \zeta, \tau) + \dots \\
z'^*(x^*, t^*) &= \varepsilon \eta_1(\xi, \tau) + \varepsilon^2 \eta_2(\xi, \tau) + \dots \\
c^* &= c_1 + \varepsilon c_2 + \varepsilon^2 c_3 + \dots
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.9)$$

を仮定し、式(4.8)に適用すれば、一様流を伴う有限振幅波を解として持つ水面変動に関する方程式は式(2.26)と全く同一のものとなることがわかる。したがって、水面変動に対して定形波を仮定して波動解を考えることにすれば、一様流を伴うクノイド波に関する波動方程式として、次式に示すような式(2.31)と全く同様の方程式が導かれる。

$$\begin{aligned}
& -c^* \eta_{\sigma} + \frac{3}{2} \eta \eta_{\sigma} + \frac{1}{6} \eta_{\sigma\sigma\sigma} = -\varepsilon \left\{ \frac{3}{2} \eta_{\sigma} \eta_{\sigma\sigma} + \frac{2}{3} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta^2 \eta_{\sigma} \right. \\
& - \frac{5}{2} c^* \eta \eta_{\sigma} + \frac{1}{2} c^{*2} \eta_{\sigma} + \frac{1}{15} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \left. \right\} - \varepsilon^2 \left\{ 4 c^{*2} \eta \eta_{\sigma} - 6 c^* \eta^2 \eta_{\sigma} - \frac{7}{2} c^* \eta_{\sigma} \eta_{\sigma\sigma} \right. \\
& - \frac{1}{2} c^{*3} \eta_{\sigma} - c^* \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{6} c^{*2} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + 2 \eta_{\sigma\sigma} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{4}{3} \eta_{\sigma} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{2}{5} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \\
& + \frac{5}{2} \eta_{\sigma}^3 + \frac{15}{2} \eta \eta_{\sigma} \eta_{\sigma\sigma} + \frac{5}{4} \eta^2 \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{9}{4} \eta^3 \eta_{\sigma} - \frac{1}{15} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{17}{630} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \left. \right\} \\
& + O(\varepsilon^3) \dots\dots\dots (4.10)
\end{aligned}$$

## (2) 一様流を伴うクノイド波のせつ動解

一様流を伴うクノイド波理論の特性を、第3次近似解を用いて列記すれば、以下のようになる。

まず、波形は次式で表される。

$$\frac{z'}{h} = \lambda \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[ 4 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 5k^4 - 13k^2 + 8 \right]$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda^2}{2k^2} \left\{ 6 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \lambda^2 \text{cn}^4 \vartheta - \frac{\lambda^3}{8k^6} \left[ \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 83 \left( \frac{E}{K} \right) + 149k^2 - 199 \right\} \right. \\
& + \frac{1}{25} \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 2108k^4 - 5833k^2 + 3933 \right\} + 13k^6 - \frac{3083}{50} k^4 + \frac{4499}{50} k^2 - \frac{1033}{25} \left. \right] \\
& + \frac{\lambda^3}{8k^4} \left[ \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 83 \left( \frac{E}{K} \right) + 106k^2 - 136 \right\} + \frac{331}{10} k^4 - \frac{861}{10} k^2 + 56 \right] \text{cn}^2 \vartheta \\
& - \frac{\lambda^3}{80k^2} \left\{ 300 \left( \frac{E}{K} \right) + 302k^2 - 301 \right\} \text{cn}^4 \vartheta + \frac{101}{80} \lambda^3 \text{cn}^6 \vartheta \quad \dots\dots\dots (4.11)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\vartheta = \frac{1}{2k} (3\lambda)^{1/2} \left( \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

であり,  $\lambda$  はすでに示した式 (2.112) を用いて求めることができる。また, だ円関数の母数  $k$  は,

$$2K = \frac{1}{2k} (3\lambda)^{1/2} \left( \frac{c}{\sqrt{gh}} \right) T \sqrt{\frac{g}{h}} \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

より求められる。

ついで, 波速は

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\sqrt{gh}} &= 1 + F_r - \frac{\lambda}{2k^2} \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{\lambda^2}{40k^4} \left[ 45 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} \right. \\
& + 19k^4 - 64k^2 + 64 \left. \right] + \frac{\lambda^3}{5600k^6} \left[ 10 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 6927 \left( \frac{E}{K} \right) + 10799k^2 - 14112 \right\} \right. \\
& - 2 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 4603k^4 + 77092k^2 - 80317 \right\} - 24155k^6 + 74838k^4 - 5959k^2 - 41974 \left. \right] \\
& \dots\dots\dots (4.14)
\end{aligned}$$

で表され, 母数  $k$  が一様流の Froude 数  $F_r$  に依存することがわかる。

さらに, 水平および鉛直水粒子速度は, それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned}
\frac{U+u}{\sqrt{gh}} &= F_r + \lambda \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^2} \left[ 2 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 4 \left( \frac{E}{K} \right) + 6k^2 - 7 \right\} + 5k^4 - 11k^2 \right. \\
& + 6 + 3k^2 (k^2 - 1) \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \left. \right] - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left\{ 5 \left( \frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 + 3 (2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right\} \\
& \text{cn}^2 \vartheta + \frac{\lambda^2}{4} \left\{ 9 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^4 \vartheta - \frac{3\lambda^3}{16k^4} \left[ (2k^4 - 3k^2 + 1) \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 2 \left\{ 5 \left( \frac{E}{K} \right) (k^2 - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. - k^4 - k^2 + 2 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] - \frac{\lambda^3}{200k^6} \left[ 50 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 24 \left( \frac{E}{K} \right) + 50k^2 - 61 \right\} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{E}{K} \right) (1063k^4 - 3563k^2 + 2563) + 55k^6 - 614k^4 + 1272k^2 - 713 \Big] + \frac{\lambda^3}{16k^4} \\
& \Big[ 3(17k^4 - 17k^2 + 2) \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 12 \left\{ 5 \left( \frac{E}{K} \right) (2k^2 - 1) - 8k^4 + 3k^2 + 2 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \\
& + 4 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 31 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 32 \right\} - \frac{2}{5} (k^4 + 9k^2 - 81) \Big] \operatorname{cn}^2 \vartheta - \frac{3\lambda^3}{80k^2} \Big[ 75(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^4 \\
& + 50 \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) - 7k^2 + 2 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 24 \left\{ 5 \left( \frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 \right\} \Big] \operatorname{cn}^4 \vartheta + \frac{3\lambda^3}{80} \left\{ 75 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 200 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right. \\
& \left. + 32 \right\} \operatorname{cn}^6 \vartheta \dots\dots\dots (4.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{w}{\sqrt{g_h}} &= \left[ \frac{3}{k^2} \lambda^3 \right]^{1/2} \left( \frac{z}{h} \right) \operatorname{cn} \vartheta \operatorname{sn} \vartheta \operatorname{dn} \vartheta \left( 1 - \frac{\lambda}{2k^2} \left[ 5 \left( \frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 + (2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} k^2 \operatorname{cn}^2 \vartheta \right] + \frac{\lambda^2}{80k^4} \left[ 3(17k^4 - 17k^2 + 2) \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 20 \left\{ 5 \left( \frac{E}{K} \right) (2k^2 - 1) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - 8k^4 + 3k^2 + 2 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 20 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 58 \left( \frac{E}{K} \right) + 38k^2 - 77 \right\} + 178k^4 - 558k^2 + 552 \right] \\
& \left. - \frac{\lambda^2}{40k^2} \left[ 45(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 50 \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) - 7k^2 + 2 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 90 \left( \frac{E}{K} \right) + 162k^2 - 36 \right] \operatorname{cn}^2 \vartheta \right. \\
& \left. + \frac{3\lambda^2}{80} \left\{ 45 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 200 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 96 \right\} \operatorname{cn}^4 \vartheta \right) \dots\dots\dots (4.16)
\end{aligned}$$

さらに、圧力は次式で表される。

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\rho g_h} &= 1 - \frac{z}{h} + \lambda \left\{ \operatorname{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[ 3(k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 4 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} \right. \\
& \left. + 5k^4 - 16k^2 + 11 \right] - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left[ 3(2k^2 - 1) \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 6 \left( \frac{E}{K} \right) - 2k^2 - 2 \right] \operatorname{cn}^2 \vartheta \\
& + \frac{3}{4} \lambda^2 \left[ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right] \operatorname{cn}^4 \vartheta - \frac{3}{16k^4} \lambda^3 \left[ (2k^4 - 3k^2 + 1) \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 4 \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) (k^2 - 1) \right. \right. \\
& \left. \left. - k^4 + 1 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] - \frac{\lambda^3}{200k^6} \left[ 25 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 83 \left( \frac{E}{K} \right) + 149k^2 - 199 \right\} \right. \\
& \left. + \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 1358k^4 - 5083k^2 + 3933 \right\} + 100k^6 - 829k^4 + 1762k^2 - 1033 \right] \\
& + \frac{\lambda^3}{80k^4} \left[ 15(17k^4 - 17k^2 + 2) \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 60 \left\{ 6 \left( \frac{E}{K} \right) (2k^2 - 1) - 9k^4 + 3k^2 + 2 \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right. \\
& \left. + 10 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 83 \left( \frac{E}{K} \right) - 14k^2 - 76 \right\} + 16k^4 + 54k^2 + 170 \right] \operatorname{cn}^2 \vartheta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda^3}{80k^2} \left[ -225 (2k^2 - 1) \left(\frac{z}{h}\right)^4 - 60 \left\{ 9 \left(\frac{E}{K}\right) - 19k^2 + 5 \right\} \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 600 \left(\frac{E}{K}\right) \right. \\
& \left. - 152k^2 - 134 \right] \text{cn}^4 \vartheta + \frac{\lambda^3}{80} \left[ 225 \left(\frac{z}{h}\right)^4 - 660 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + 176 \right] \text{cn}^6 \vartheta \dots \dots \quad (4.17)
\end{aligned}$$

### 第3節 一様流を伴う擬 Stokes 波理論

#### (1) 波動方程式の誘導

この場合においても、前節と同様の仮定を用い、式(2.5)および(4.5)に示した無次元量を用いれば、その基礎方程式は式(4.6)と一致する。したがって、前節で用いた式(4.7)の変換および式(3.8)に示したせつ動解を用いれば、式(4.6)は、波の分散性が非線形性に比べ $\varepsilon$ のオーダーだけ卓越した一様流を伴う有限振幅波を解として持つ水面変動に関する方程式に書き換えられ、それは式(3.20)に一致する。ここで、前節同様に定形波を仮定すれば、一様流を伴う擬 Stokes 波に関する波動方程式として、次式のような式(3.24)と全く同様の方程式が導かれる。

$$\begin{aligned}
& -c^* \eta_\sigma + \frac{1}{6} \eta_{\sigma\sigma\sigma} = -\varepsilon \left\{ \frac{3}{2} \eta \eta_\sigma + \frac{1}{15} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{2} c^{*2} \eta_\sigma \right\} - \varepsilon^2 \left\{ \frac{17}{630} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\
& - \frac{1}{15} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} + \frac{2}{3} \eta \eta_{\sigma\sigma} + \frac{1}{6} c^{*2} \eta_{\sigma\sigma\sigma} - \frac{5}{2} c^* \eta \eta_\sigma - \frac{1}{2} c^{*3} \eta_\sigma \left. \right\} - \varepsilon^3 \left\{ \frac{31}{2835} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\
& + 2 \eta_{\sigma\sigma} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{4}{3} \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{2}{5} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{17}{630} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{15} c^{*2} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \\
& \left. - \frac{7}{2} c^* \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} - c^* \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c^{*3} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta^2 \eta_\sigma + 4 c^{*2} \eta \eta_\sigma + \frac{1}{2} c^{*4} \eta_\sigma \right\} + O(\varepsilon^4) \dots \quad (4.18)
\end{aligned}$$

#### (2) 一様流を伴う擬 Stokes 波のせつ動解

一様流を伴う擬 Stokes 波理論の特性を、その第4次近似解を用いて列記すれば、以下のようになる。まず、波形は次式で表される。

$$\begin{aligned}
\frac{z'}{h} = & \frac{\lambda_0}{2} \cos \vartheta + \frac{\lambda_0^2}{16} \left\{ 3 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} + 2 + \frac{613}{1260} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^2 - \frac{27}{128} \lambda_0^2 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-6} \right\} \cos 2\vartheta \\
& + \frac{\lambda_0^3}{512} \left\{ 27 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-4} + 45 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} \right\} \cos 3\vartheta + \frac{27}{2048} \lambda_0^4 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-6} \cos 4\vartheta \dots \dots \quad (4.19)
\end{aligned}$$

ここに、

$$\vartheta = \frac{2\pi h}{L} \left( \frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \dots \dots \dots (4.20)$$

であり、 $\lambda_0$  はすでに示した式(3.65)より求められる。

ついで、波速は、

$$\frac{c}{\sqrt{g_h}} = 1 + F_r - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{19}{360} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{55}{3024} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{2941}{604800} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^8$$

$$+ \frac{9}{64} \lambda_0^2 \left\{ \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \right\} \dots\dots\dots (4.21)$$

で表される。さらに、水平および鉛直水粒子速度は、それぞれ次式で表される。

$$\frac{U+u}{\sqrt{g_h}} = F_r + \frac{\lambda_0^2}{16} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} + \frac{\lambda_0}{2} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} \right.$$

$$+ \frac{1}{120} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 \left\{ 5 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 20 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 12 \right\} + \frac{1}{15120} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 \left\{ 21 \left( \frac{z}{h} \right)^6 - 420 \left( \frac{z}{h} \right)^4 \right.$$

$$+ 756 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 278 \left. \right\} - \frac{3}{64} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \left. \right] \cos \vartheta + \frac{\lambda_0^2}{16} \left[ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ 12 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 5 \right\} \right.$$

$$+ \frac{1}{2520} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ 5040 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 12600 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 3137 \right\} - \frac{27}{128} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-6} \left. \right] \cos 2\vartheta$$

$$+ \frac{\lambda_0^3}{512} \left[ 27 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} - \frac{3}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \left\{ 81 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 35 \right\} \right] \cos 3\vartheta$$

$$+ \frac{27}{2048} \lambda_0^4 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-6} \cos 4\vartheta \dots\dots\dots (4.22)$$

$$\frac{w}{\sqrt{g_h}} = \frac{\lambda_0}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right) \left( \frac{z}{h} \right) \left( \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} + \frac{1}{320} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 40 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + 96 \right\} \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{15120} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 \left\{ 3 \left( \frac{z}{h} \right)^6 - 84 \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 448 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 271 \right\} - \frac{3}{64} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \left. \right] \sin \vartheta$$

$$+ \frac{\lambda_0}{4} \left[ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 5 \right\} + \frac{1}{1260} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ 168 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 35 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 3314 \right\} \right] \sin 2\vartheta$$

$$+ \frac{\lambda_0^2}{256} \left[ 81 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \left\{ 243 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 288 \right\} \right] \sin 3\vartheta + \frac{27}{4096} \lambda_0^3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \sin 4\vartheta$$

また、圧力は次式で表される。 (4.23)

$$\frac{p}{\sqrt{\rho g_h}} = 1 - \frac{z}{h} - \frac{\lambda_0^2}{8} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + \frac{\lambda_0}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} + \frac{1}{24} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right. \right.$$

$$+ 5 \left. \right\} + \frac{1}{720} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 \left\{ \left( \frac{z}{h} \right)^6 - 15 \left( \frac{z}{h} \right)^4 + 75 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 61 \right\} \left. \right] \cos \vartheta + \frac{\lambda_0^2}{16} \left[ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right.$$

$$+ 2 \left\{ 6 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 5 \right\} + \frac{1}{1260} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ 2520 \left( \frac{z}{h} \right)^4 - 2520 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1907 \right\} - \frac{27}{128} \lambda_0^2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-6} \left. \right]$$

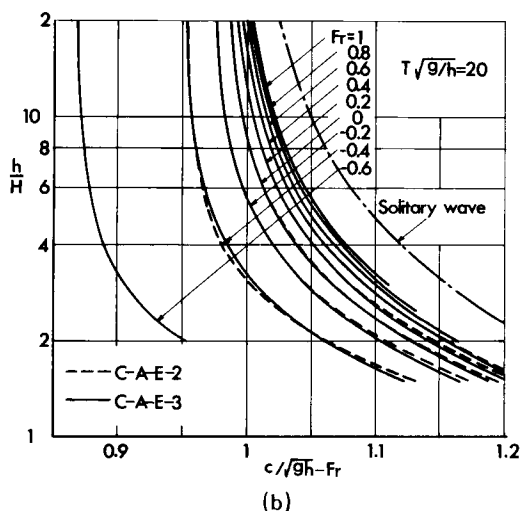
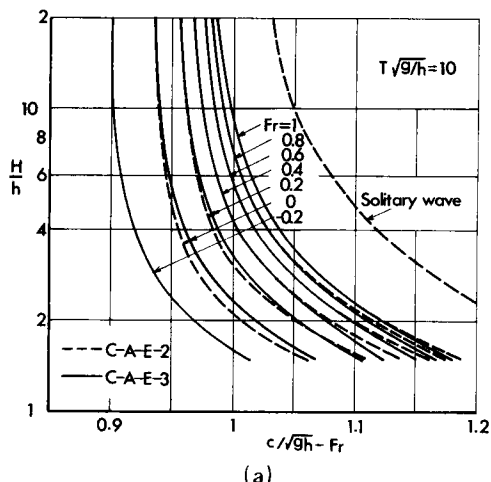
$$\cos 2\vartheta + \frac{\lambda_0^2}{512} \left[ 27 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \left\{ 243 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 198 \right\} \right] \cos 3\vartheta + \frac{27}{2048} \lambda_0^4 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-6}$$

#### 第4節 一様流を伴う有限振幅波の特性

ここでは、まず波速および水平水粒子速度に関して、クノイド波および擬 Stokes 波の近似解の収束性を検討するとともに、これらに及ぼす流れの影響を明らかにする。ついで、Whitham<sup>21)</sup> にならって波と流れの共存系における保存式を導き、これより波の質量流束、運動量、運動量流束、エネルギーおよびエネルギーフラックスの各保存量を定義するとともに、第2節および第3節で導いた一様流を伴う有限振幅波理論を用いて、これらの数学的表示を与え、各保存量に及ぼす流れの影響と波の非線形効果を表す質量輸送の影響を明らかにする。

##### (1) 波 速

図-4.2は、式(4.14)を用いて一様流を伴うクノイド波の波速の特性を示したものであり、横軸には無次元波速と一様流の流速との差を示し、縦軸には水深・波高比  $h/H$  を示してある。また  $F_r$  の符号が負の場合は逆流を表わし、図中の記号については図-2.3におけるものと同じである。これより、この近似解の収束性は、無次元周期  $T\sqrt{g/h}$  および一様流の Froude 数  $F_r$  が大きくなるに従って良好になるが、 $F_r$  が負となる逆流の場合には、収束性は急速に悪くなる。たとえば、 $T\sqrt{g/h}=1.0$  に対しては  $F_r \leq -0.2$  において近似解が発散してしまい、クノイド波の存在が不可能となることがわかる。これは、逆流による波長の短縮化によって、波の分散性が卓越するようになり、この理論の適用性が失われた結果ともいえよう。したがって、このような場合には、たとえば一様流を伴う擬 Stokes 波理論を用いる必要があろう。ついで、波速に対する流れの影響については、 $T\sqrt{g/h}$  が大きくなるに従ってその影響は弱くなるが、これは孤立波が流れに対して独立であることに対応するものと言えよう。また、 $h/H$  が小さくなるに従って  $F_r$  の影響が若干大きくなっ



ていることがわかるが、これは、波の非線形性および流れの間の相互作用の効果によるものであろう。

つぎに、図-4.3は、式(4.21)を用いて一様流を伴う擬 Stokes 波の波速の特性を示したものであり、図中のQ-S-3およびQ-S-4は、それぞれ第3次および第4次近似解を示す。これより、近似解の収束性は、前述と同じく  $T\sqrt{g/h}$ 、 $h/H$  および  $Fr$  が大きくなるに従って良好になる傾向が見られる。また、前述したような一様流を伴うクノイド波が不安定となる逆流の場合についても、一様流を伴う擬 Stokes 波の存在が可能となっていることがわかる。しかしながら、この理論においてもその限界が存在し、たとえば  $T\sqrt{g/h}=10$  に対して  $Fr=-0.4$  の場合には第3次近似解が求められなくなり、逆流流速が大きい場合には、さらに波の分散性を卓越させた理論が必要となろう。

なお、図-4.2(a)および図-4.3(b)からわかるように、これら両理論は  $T\sqrt{g/h}=10$  付近においてはほぼ同様な特性を示すので、流れが存在する場合においても、これらの理論はこの付近ではほぼ一致するものと考えられる。

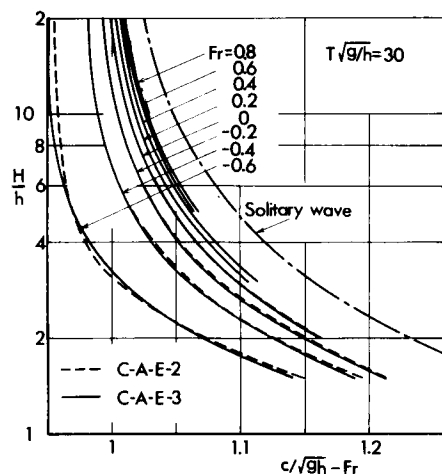


図-4.2 一様流を伴うクノイド波の波速の特性

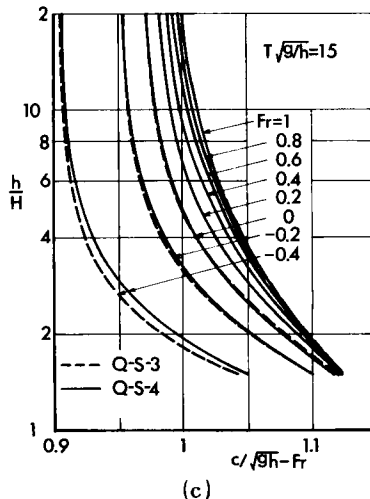
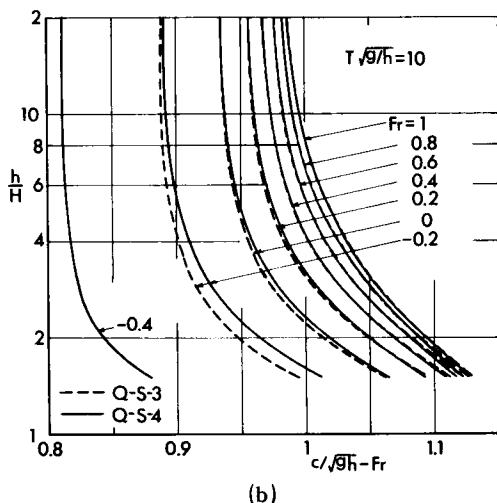
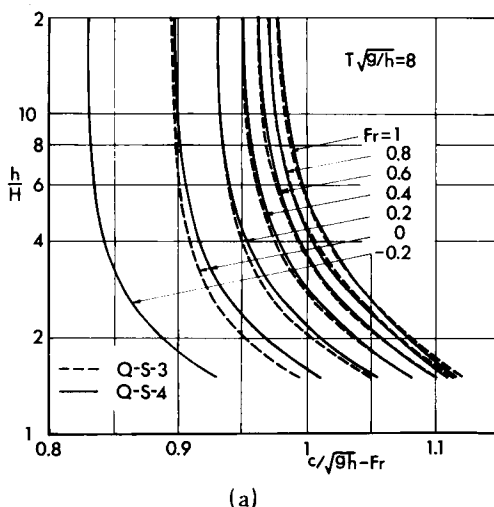
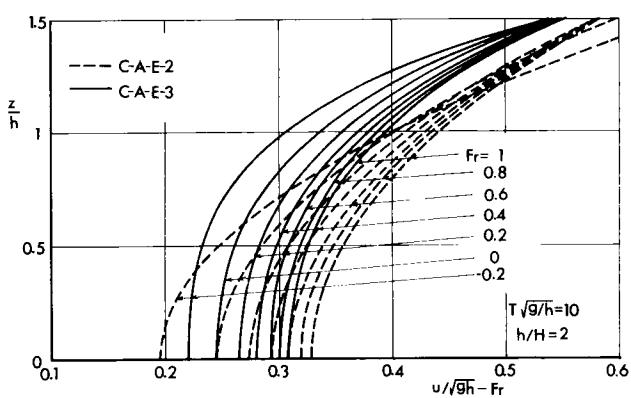
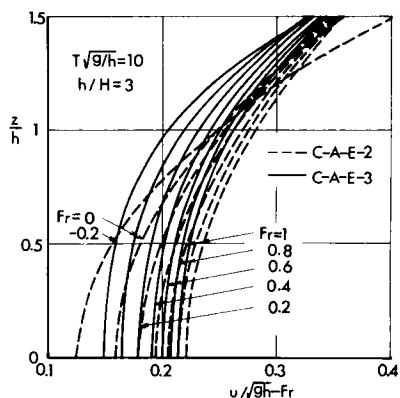


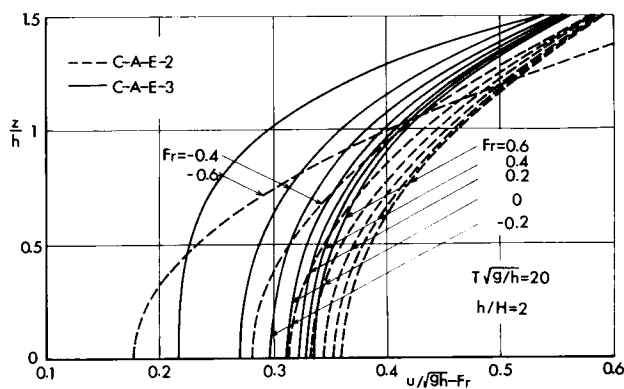
図-4.3 一様流を伴う擬 Stokes 波の波速の特性



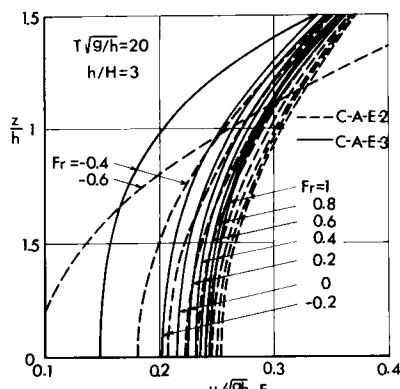
(a)



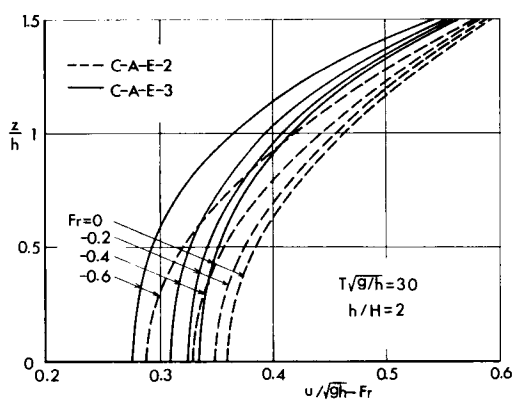
(b)



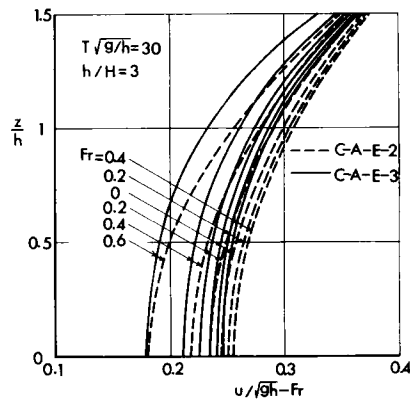
(c)



(d)



(e)



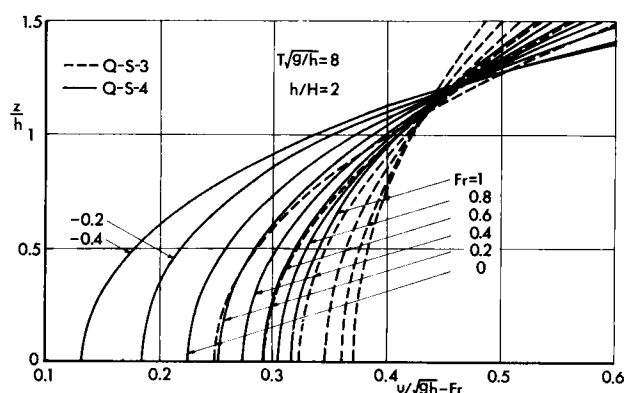
(f)

図-4.4 一様流を伴うクノイド波の水平水粒子速度の特性

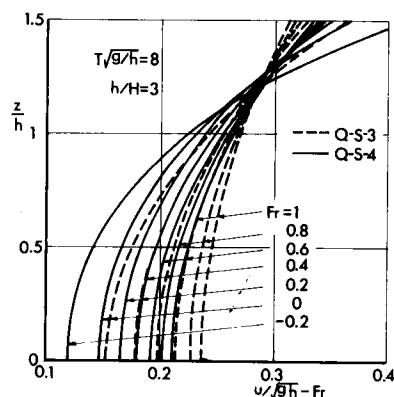
## (2) 水平水粒子速度

図-4.4は、式(4.15)を用いて一様流を伴うクノイド波理論の水平水粒子速度の鉛直分布の特性を示したものであり、横軸には水平水粒子速度と一様流の流速との差を示してある。なお、図中の記号は、図-4.2と同じである。これから、この近似解の収束性は無次元周期 $T\sqrt{g/h}$ および水深・波長比 $h/H$ が大きくなるに従って良くなっているが、波速の場合に比べて収束性は若干悪くなっていることがわかる。このことは、水平水粒子速度については、さらに高次近似解が必要であることを示すものと言えるが、ここでは、第3次近似解までの結果を用いて、この波と流れの共存系における水平水粒子速度の特性について考察する。

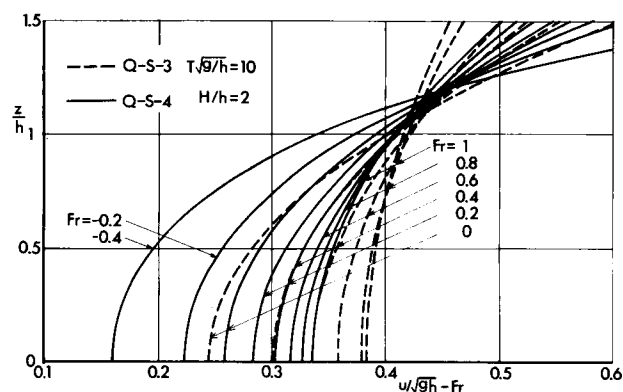
水平水粒子速度の鉛直分布に及ぼす一様流のFroude数 $F_r$ の影響については、 $T\sqrt{g/h}$ および $h/H$ が大きくなるに従って小さくなっており、波速の場合と同様な傾向が見られる。また、その鉛直分布のこう配は、 $F_r$ が負側に増大するに従って大きくなり、特に第2次近似解においてこの傾向は顕著である。このように、逆流の場合には、波の峯付近での水平水粒子速度の急激な増大が見られ、このために波は不安定となる。



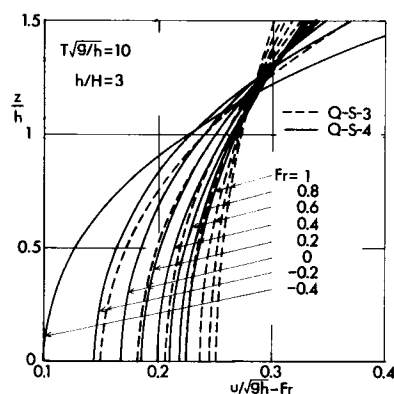
(a)



(b)



(c)



(d)



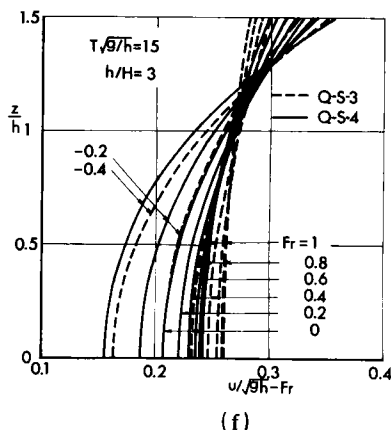
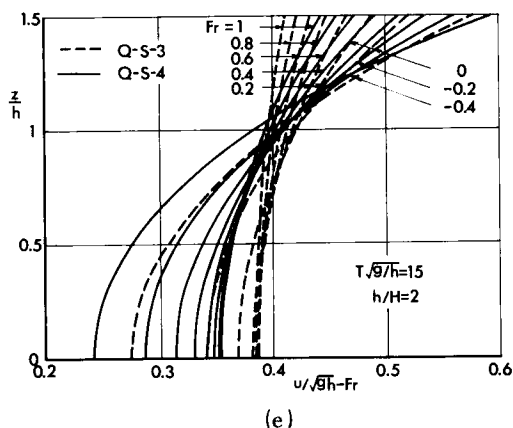


図-4.5 一様流を伴う擬 Stokes 波の水平水粒子速度の特性

つぎに図-4.5は、一様流を伴う擬 Stokes 波の場合について示したもので、図中の記号は図-4.3と同じである。これから、この場合についてもこの近似解の収束性は、波速の場合より若干悪くなっていることがわかる。また、水平水粒子速度に及ぼす流れの影響についても、図-4.4と同様な傾向が見られるが、この場合は第4次近似解の結果の方が、この鉛直分布の前傾は大きいことがわかる。

またこの場合についても、図-4.4(a)および図-4.5(b) から、これら両理論が  $T\sqrt{g/h}=1.0$  付近においてほぼ同様な特性を示すことがわかる。

### (3) 質量流束

波の質量に関する保存式は、次式で表される。

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.25)$$

ここに、

$$P_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \rho (h + z') dt = \rho h \quad \dots\dots\dots (4.26)$$

であり、 $Q_0$  は共存系での質量流束 (mass flux) で、次式に示すように、一様流による質量輸送  $Q_U$  と波による質量輸送  $Q$  の和として表される。

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \rho (u+U) dz dt = Q + Q_U \\ Q &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \rho u dz dt, \quad Q_U = \rho h U \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.27)$$

したがって、前述した一様流を伴うクノイド波理論および擬 Stokes 波理論を用いれば、 $Q_0$  はそれぞれ次式で表される。

$$\frac{Q_0}{\rho h \sqrt{gh}} = F_r + \frac{\lambda^2}{2k^4} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{20k^6} \left[ 145 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left( \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right) + \left( \frac{E}{K} \right) (34k^4 - 179k^2 + 179) - 17(k^4 - 3k^2 + 2) \right] \quad (4.28)$$

$$\frac{Q_0}{\rho h \sqrt{gh}} = F_r + \frac{\lambda^2}{16} \left\{ 3 - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} \quad (4.29)$$

図-4.6には、 $T\sqrt{g/h}=8$  に対しては一様流を伴う擬 Stokes 波理論、 $T\sqrt{g/h}=10$  に対しては一様流を伴う擬 Stokes 波理論およびクノイド波理論、また  $T\sqrt{g/h}=20$  および  $30$  に対しては一様流を伴うクノイド波理論をそれぞれ用いることにより、 $F_r$  をパラメーターとして共存系での波による質量流束  $Q$  の特性を示してある。その横軸には 無次元質量流束  $Q/\rho h \sqrt{gh}$  および縦軸には水深・波高比  $h/H$  を示し、図中の記号は図-4.2 および 4.3 と同じである。なお、この場合も  $F_r$  の符号が負の場合は逆流を意味する。これから、質量流束に関しても近似解の収束性が良好であることがわかる。波による質量流束は、波の分散性が卓越すると増大する傾向を示すが、その絶対値はたかだか  $0.07 \rho h \sqrt{gh}$  程度であり、 $|F_r| > 0.2$  となるような流れの場合には、一様流による質量流束  $F_r \rho h \sqrt{gh}$  に比べてはるかに小さく、その影響をほとんど無視できることになる。したがって、波による質量流束の影響が直接問題となるのは、 $|F_r| < 0.1$  の

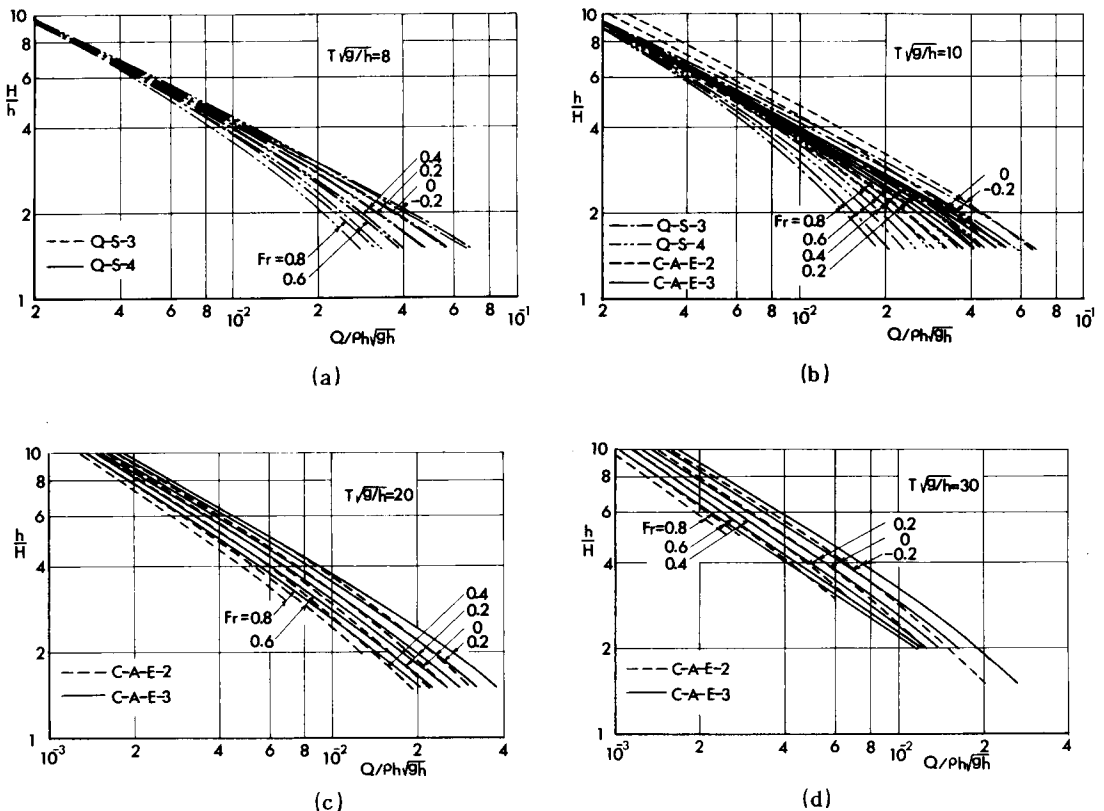


図-4.6 一様流を伴う擬 Stokes 波およびクノイド波の質量流束の特性

ような流速の小さい場合と見えよう。

#### (4) 運動量および運動量流束

波の運動量に関する保存式は、次式で表される。

$$\frac{\partial Q_0}{\partial t} + \frac{\partial M_0}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.30)$$

ここに、 $Q_0$  は式 (4.25) での  $Q_0$  と同じであり、ここでは運動量を表している。また、 $M_0$  は共存系での運動量流束 (momentum flux) であり、これを Whitham<sup>21)</sup> の例にならってその成分別に表示すれば、次式のようになる。

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \{ \rho (u+U)^2 + p \} dz dt \\ &= M + S + \frac{1}{2} \rho g h^2 \quad \dots\dots\dots (4.31) \end{aligned}$$

ここに、 $M$  はこの共存系での質量輸送に伴う運動量流束であって、次式で与えられる。

$$M = \frac{1}{\rho h} (Q_U^2 + Q^2 + 2 Q_U Q) \quad \dots\dots\dots (4.32)$$

また、 $S$  は波動成分に依存した過剰運動量流束でいわゆる radiation stress と呼ばれるものであり、次式で表される。

$$S = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} (\rho u^2 + p) dz dt - \frac{1}{2} \rho g h^2 - \frac{1}{\rho h} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \rho u dz dt \right\}^2 \quad \dots\dots (4.33)$$

したがって、第2節で誘導した一様流を伴うクノイド波理論を用いれば、 $M$  および  $S$  はそれぞれ次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{M}{\rho g h^2} &= F_r^2 + \frac{\lambda^4}{4k^8} \left[ 3 \left( \frac{E}{K} \right)^3 \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 8 \right\} + 2 \left( \frac{E}{K} \right)^2 (2k^4 - 11k^2 + 11) \right. \\ &\quad \left. - 4 \left( \frac{E}{K} \right) (k^4 - 3k^2 + 2) + k^4 - 2k^2 + 1 \right] + F_r \frac{\lambda^2}{k^4} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] \\ &\quad + F_r \frac{\lambda^3}{10k^6} \left[ 145 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left( \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right) + \left( \frac{E}{K} \right) (34k^4 - 179k^2 + 179) - 17 (k^4 - 3k^2 + 2) \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (4.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{S}{\rho g h^2} &= \frac{\lambda^2}{2k^4} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{10k^6} \left[ 100 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left( \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \frac{E}{K} \right) (11k^4 - 61k^2 + 61) - 11 (k^4 - 3k^2 + 2) \right] + \frac{\lambda^4}{4200k^8} \left[ -25 \left( \frac{E}{K} \right)^3 \right. \\ &\quad \left. \{ 3339 \left( \frac{E}{K} \right) + 4488k^2 - 8904 \} - 50 \left( \frac{E}{K} \right)^2 (861k^4 - 4200k^2 + 4200) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -100 \left( \frac{E}{K} \right) (49k^6 - 504k^4 + 1218k^2 - 812) + 2450k^6 - 12775k^4 + 20650k^2 \\
& -10325 ] \dots\dots\dots (4.35)
\end{aligned}$$

また、波と流れの共存系における運動量流束  $M_0$  は、

$$\begin{aligned}
\frac{M_0}{\rho g h^2} = & F_r^2 + \frac{1}{2} + (F_r + \frac{1}{2}) \frac{\lambda^2}{k^4} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] \\
& + \frac{\lambda^3}{6k^6} \left[ 60 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} + 10 \left( \frac{E}{K} \right) (k^4 - 7k^2 + 7) - 5 (k^4 - 3k^2 + 2) \right] \\
& + \frac{\lambda^4}{840k^8} \left[ -5 \left( \frac{E}{K} \right)^3 \left\{ 2961 \left( \frac{E}{K} \right) + 3984k^2 - 7896 \right\} - 10 \left( \frac{E}{K} \right)^2 (777k^4 - 3738k^2 \right. \\
& \left. + 3738) - 20 \left( \frac{E}{K} \right) (49k^6 - 462k^4 + 1092k^2 - 728) + 490k^6 - 2345k^4 + 3710k^2 \right. \\
& \left. - 1855 \right] + F_r \frac{\lambda^3}{10k^6} \left[ 145 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left( \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right) + \left( \frac{E}{K} \right) (34k^4 - 179k^2 + 179) \right. \\
& \left. - 17 (k^4 - 3k^2 + 2) \right] \dots\dots\dots (4.36)
\end{aligned}$$

で表される。

一方、一様流を伴う擬 Stokes 波理論を用いて  $M$  および  $S$  を表示すれば、それぞれ次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{M}{\rho g h^2} = & F_r^2 + F_r \frac{\lambda_0^2}{16} \left[ 3 - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{7}{18} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{341}{7560} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{9}{32} \lambda_0^2 \left\{ \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \right] \dots\dots\dots (4.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{S}{\rho g h^2} = & \frac{\lambda_0^2}{16} \left[ 3 - \frac{2}{3} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{14}{45} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{57}{1890} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{3}{64} \lambda_0^2 \left\{ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \right. \right. \\
& \left. \left. + 10 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \right] \dots\dots\dots (4.38)
\end{aligned}$$

また、運動量流束  $M_0$  は、次式で表される。

$$\begin{aligned}
\frac{M_0}{\rho g h^2} = & F_r^2 + \frac{1}{2} + \frac{\lambda_0^2}{16} \left[ 3F_r + 2 - \frac{1}{6} (F_r + 4) \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{7}{90} (5F_r + 4) \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 \right. \\
& \left. - \frac{57}{3780} (3F_r + 2) \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{9}{32} \lambda_0^2 \left\{ \left( F_r + \frac{3}{2} \right) \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + \left( \frac{3}{2} F_r + \frac{8}{3} \right) \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \right] \\
& \dots\dots\dots (4.39)
\end{aligned}$$

図-4.7は、静水圧の効果を除去した波と流れの共存系における運動量流束 ( $M_0 - \rho g h^2/2$ ) の特性を、

$$M_s = \rho g h^2 F_r^2 + \frac{1}{8} \rho g H^2 \left\{ \frac{2\pi h/L}{\sinh(4\pi h/L)} + \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{2} \rho g h^2 \quad \dots\dots\dots (4.40)$$

を用いて表される微小振幅波の運動量流束 ( $M_s - \rho g h^2/2$ ) で無次元化して示したものであり、 $F_r$  をパラメーターとし、横軸に水深・波高比  $h/H$  および縦軸に無次元運動量流束を示す。なお、図中の記号は、図-4.6と同様である。この図より、近似解の収束性は全般的に良好であり、特に  $T\sqrt{g/h}$  および  $|F_r|$  が大きい場合には、この傾向が顕著である。ついで、この共存系においても波の非線形性の影響は、 $T\sqrt{g/h}$  が大きくなるに従って顕著になる傾向にあることがわかるが、流れの流速との関係では  $|F_r|$  が大きくなるに従って小さくなる傾向が見られる。これは、流速が大きいと流れ自体による運動量流束の効果が卓越してくるために、波の非線形性の影響が相対的に減少する結果と考えられる。しかしながら、一般に存在する流れは  $|F_r| < 0.2$  程度の流速であると考えられるから、こうした場合には、共存系での有限振幅波理論を用いるべきであろう。また、 $F_r = \pm 0.2$  の場合で無次元質量流束の値に相違が見られるが、これは波の質量流束の影響を示すものであり、 $|F_r| < 0.2$  程度の流れでは波の質量流束の影響が問題となってくることをわかる。

#### (5) エネルギーおよびエネルギーフラックス

エネルギーに関する保存式は、次式で表される。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.41)$$

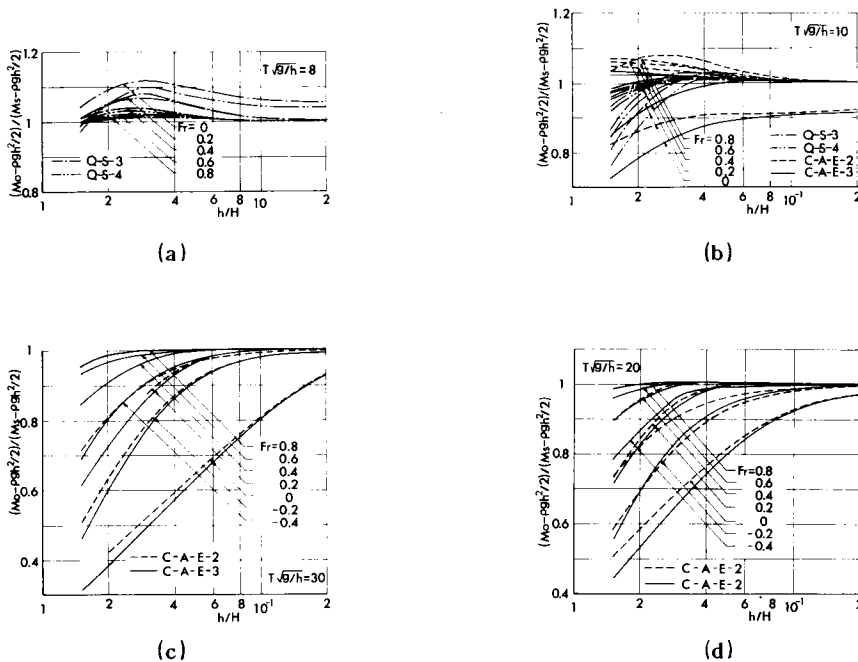


図-4.7 一様流を伴う擬 Stokes 波およびクノイド波の運動量流束の特性

ここに、 $E$ は共存系での全エネルギーであり、静水面を基準とした位置エネルギー $E_p$ および運動エネルギー $E_k$ の和として、次式で表される。

$$E = E_p + E_k \quad \dots\dots\dots (4.42)$$

ここに、

$$E_p = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \rho g (z-h) dz dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \rho g z'^2 dt - \frac{1}{2} \rho g h^2 \quad \dots\dots\dots (4.43)$$

$$E_k = \frac{1}{2T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \{ \rho (u+U)^2 + w^2 \} dz dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \rho (u^2 + w^2) dz dt \\ + \frac{1}{2} \rho h U^2 + U Q \quad \dots\dots\dots (4.44)$$

したがって、前述した一様流を伴うクノイド波理論を用いて $E_p$ および $E_k$ を表せば、それぞれ次式のようにになる。

$$\frac{E_p}{\rho g h^2} = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{6k^4} \left[ -\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{30k^6} \left[ 90\left(\frac{E}{K}\right)^2 \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} \right. \\ \left. + 2\left(\frac{E}{K}\right) (11k^4 - 56k^2 + 56) - 11(k^4 - 3k^2 + 2) \right] + \frac{\lambda^4}{4200k^8} \left[ -\left(\frac{E}{K}\right)^3 \{ 62475\left(\frac{E}{K}\right) \right. \\ \left. + 88900k^2 - 169400 \} - \left(\frac{E}{K}\right)^2 \{ 40208k^4 - 173558k^2 + 167958 \} - \left(\frac{E}{K}\right) \{ 5176k^6 \right. \\ \left. - 47972k^4 + 110060k^2 - 72440 \} + 2588k^6 - 13995k^4 + 22814k^2 - 11407 \right] \\ \dots\dots\dots (4.45)$$

$$\frac{E_k}{\rho g h^2} = \frac{F^2 r}{2} + \left(\frac{F r}{2} + \frac{1}{6}\right) \frac{\lambda^2}{k^4} \left[ -\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{30k^6} \left[ 105\left(\frac{E}{K}\right)^2 \right. \\ \left. \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} + \left(\frac{E}{K}\right) (26k^4 - 131k^2 + 131) - 13(k^4 - 3k^2 + 2) \right] + \frac{\lambda^3 F r}{20k^6} \\ \left[ 145\left(\frac{E}{K}\right)^2 \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} + \left(\frac{E}{K}\right) (34k^4 - 179k^2 + 179) - 17(k^4 - 3k^2 + 2) \right] \\ + \frac{\lambda^4}{4200k^8} \left[ -25\left(\frac{E}{K}\right)^3 \{ 3066\left(\frac{E}{K}\right) + 4312k^2 - 8288 \} - \left(\frac{E}{K}\right)^2 \{ 49308k^4 - 211008k^2 \right. \\ \left. + 205408 \} - \left(\frac{E}{K}\right) \{ 6776k^6 - 59472k^4 + 134960k^2 - 89040 \} + 3388k^6 - 17570k^4 \right. \\ \left. + 28364k^2 - 14182 \right] \quad \dots\dots\dots (4.46)$$

また、全エネルギー  $E$  は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{E}{\rho g h^2} = & \frac{F_r^2}{2} - \frac{1}{2} + \left( \frac{F_r}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{\lambda^2}{k^4} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + \frac{\lambda^3}{30k^6} \\ & \left[ 195 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left( \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right) + \left( \frac{E}{K} \right) (48k^4 - 243k^2 + 243) - 24k^4 + 72k^2 - 48 \right] \\ & + F_r \frac{\lambda^3}{20k^6} \left[ 145 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left( \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right) + \left( \frac{E}{K} \right) (34k^4 - 179k^2 + 179) - 17(k^4 - 3k^2 + 2) \right] \\ & + \frac{\lambda^4}{4200k^8} \left[ -25 \left( \frac{E}{K} \right)^3 \{ 5565 \left( \frac{E}{K} \right) + 7868k^2 - 15064 \} - \left( \frac{E}{K} \right)^2 (89516k^4 - 384566k^2 \right. \\ & \left. + 373366) - \left( \frac{E}{K} \right) (11952k^6 - 107444k^4 + 245020k^2 - 161480) + 5976k^6 \right. \\ & \left. - 31565k^4 + 51178k^2 - 25589 \right] \dots\dots\dots (4.47) \end{aligned}$$

一方、一様流を伴う擬 Stokes 波理論を用いれば、 $E_p$  および  $E_k$  はそれぞれ式 (4.48) および (4.49) で表示される。

$$\frac{E_p}{\rho g h^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left[ 1 + \frac{3}{16} \left\{ \frac{3}{4} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \right] \dots\dots\dots (4.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_k}{\rho g h^2} = & \frac{1}{2} F_r^2 + \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left[ 1 + \frac{191}{3780} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{3}{64} \lambda_0^2 \left\{ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + 7 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \right] \\ & + \frac{1}{16} F_r \lambda_0^2 \left[ 3 - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{1}{18} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{341}{7560} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{9}{32} \lambda_0^2 \left\{ \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \right] \dots\dots\dots (4.49) \end{aligned}$$

これより、全エネルギー  $E$  は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{E}{\rho g h^2} = & \frac{1}{2} (F_r^2 - 1) + \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left[ 2 + \frac{191}{3780} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{3}{32} \lambda_0^2 \left\{ 3 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + \frac{11}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \right] \\ & + \frac{1}{16} F_r \lambda_0^2 \left[ 3 - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{1}{18} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{341}{7560} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{9}{32} \lambda_0^2 \left\{ \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \right] \dots\dots\dots (4.50) \end{aligned}$$

一方、式 (4.41) における  $W$  は共存系でのエネルギー・フラックスを示し、次式のように成分別に表される。

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \rho (u+U) \left\{ \frac{1}{2} (u+U)^2 + \frac{1}{2} w^2 + \frac{p}{\rho} + g(z-h) \right\} dz dt$$

$$=W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \quad \dots\dots\dots (4.51)$$

ここに,

$$W_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \left\{ p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) + \rho g (z-h) \right\} u dz dt \quad \dots\dots\dots (4.52)$$

$$W_1 = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} \left\{ \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) + \rho g (z-h) \right\} dz dt + \frac{1}{2} \rho g h^2 \right] U \quad \dots\dots (4.53)$$

$$W_2 = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{h+z'} (p + \rho u^2) dz dt - \frac{1}{2} \rho g h^2 - \frac{1}{\rho h} Q^2 \right] U = SU \quad \dots\dots\dots (4.54)$$

$$W_3 = \frac{3}{2} U^2 Q + \frac{1}{\rho h} Q^2 U \quad \dots\dots\dots (4.55)$$

$$W_4 = \frac{1}{2} U^2 Q_u \quad \dots\dots\dots (4.56)$$

また、 $W_0$ ；波によって輸送される波のエネルギーフラックス、 $W_1$ ；一様流によって輸送される波のエネルギーフラックス、 $W_2$ ；同じく一様流によって輸送される radiation stress によるエネルギーフラックス、 $W_3$ ；波および流れによる質量流束の相互作用によって生じるエネルギーフラックス、および $W_4$ ；一様流によって輸送される一様流のエネルギーフラックスである。これから、流れのない場合にはもちろん $W=W_0$ となるが、流れの存在する場合には、 $W_4$ のほかに波と流れによる相互作用項として、 $W_1$ 、 $W_2$  および $W_3$ が生じ、特に $W_3$ によって波の質量流束 $Q$ の影響が表されることがわかる。そこで、まず、一様流を伴うクノイド波理論を用いて、 $W_0$ 、 $W_1$ 、 $W_2$  および $W_3$ の各項を表示すれば、それぞれ次式ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{W_0}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} &= \frac{\lambda^2}{3 k^4} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2 k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] \\ &+ \frac{\lambda^3}{30 k^6} \left[ 255 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left( \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right) + \left( \frac{E}{K} \right) (58 k^4 - 313 k^2 + 313) - 29 k^4 + 87 k^2 - 58 \right] \\ &+ \frac{\lambda^4}{4200 k^8} \left[ -25 \left( \frac{E}{K} \right)^3 \left\{ 8463 \left( \frac{E}{K} \right) + 11732 k^2 - 22792 \right\} - \left( \frac{E}{K} \right)^2 \{ 127211 k^4 - 567161 k^2 \right. \right. \\ &\left. \left. + 555961 \right\} - \left( \frac{E}{K} \right) \{ 16642 k^6 - 152174 k^4 + 351070 k^2 - 232180 \} + 8321 k^6 - 42765 k^4 \right. \\ &\left. + 68888 k^2 - 34444 \right] \quad \dots\dots\dots (4.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{W_1}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} &= F_r \frac{\lambda^2}{3 k^4} \left[ - \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2 k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + F_r \frac{\lambda^3}{30 k^6} \left\{ 195 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left( \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right) \right. \\ &\left. + \left( \frac{E}{K} \right) (48 k^4 - 243 k^2 + 243) - 24 k^4 + 72 k^2 - 48 \right\} + F_r \frac{\lambda^4}{4200 k^8} \left[ -25 \left( \frac{E}{K} \right)^3 \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \{ 5565 \left(\frac{E}{K}\right) + 7368 k^2 - 15064 \} - \left(\frac{E}{K}\right)^2 (89516 k^4 - 384566 k^2 + 373366) \\
& - \left(\frac{E}{K}\right) (11952 k^6 - 107444 k^4 + 245020 k^2 - 161480) + 5976 k^6 - 31565 k^4 + 51178 k^2 \\
& - 25589 \quad \dots\dots\dots (4.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{W_2}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} &= F_r \frac{\lambda^2}{2 k^4} \left[ - \left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K}\right) + 2 k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + F_r \frac{\lambda^3}{10 k^6} \left[ 100 \left(\frac{E}{K}\right)^2 \left(\frac{E}{K} + k^2 - 2\right) \right. \\
& + 6 \left(\frac{E}{K}\right) (11 k^4 - 61 k^2 + 61) \left. \right] + F_r \frac{\lambda^4}{4200 k^8} \left[ - 25 \left(\frac{E}{K}\right)^3 \{ 3339 \left(\frac{E}{K}\right) + 4488 k^2 \right. \\
& - 8904 \left. \right] - 50 \left(\frac{E}{K}\right)^2 (861 k^4 - 4200 k^2 + 4200) - 100 \left(\frac{E}{K}\right) (49 k^6 - 504 k^4 + 1218 k^2 \\
& - 812) + 2450 k^6 - 12775 k^4 + 20650 k^2 - 10325 \quad \dots\dots\dots (4.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{W_3}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} &= F_r^2 \left(\frac{3 \lambda^2}{4 k^4}\right) \left[ - \left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K}\right) + 2 k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] + F_r^2 \left(\frac{\lambda^3}{20 k^6}\right) \left[ 145 \left(\frac{E}{K}\right)^2 \right. \\
& \left(\frac{E}{K} + k^2 - 2\right) + \left(\frac{E}{K}\right) (34 k^4 - 179 k^2 + 179) - 17 (k^4 - 3 k^2 + 2) \left. \right] \\
& + F_r \frac{\lambda^4}{4 k^8} \left[ - \left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K}\right) + 2 k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right]^2 \quad \dots\dots\dots (4.60)
\end{aligned}$$

一方、一樣流を伴う擬 Stokes 波理論を用いれば、それぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{W_0}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} &= \frac{1}{8} \lambda_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^4 - \frac{5}{432} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^6 + \frac{9}{64} \lambda_0^2 \left\{ \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (4.61)
\end{aligned}$$

$$\frac{W_1}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} = \frac{1}{16} F_r \lambda_0^2 \left[ 2 + \frac{191}{3780} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^6 + \frac{3}{32} \lambda_0^2 \left\{ 3 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-4} + \frac{11}{2} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} \right\} \right] \dots (4.62)$$

$$\begin{aligned}
\frac{W_2}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} &= \frac{1}{16} F_r \lambda_0^2 \left[ 3 - \frac{2}{3} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^2 + \frac{14}{45} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^4 - \frac{57}{1890} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^6 + \frac{3}{64} \lambda_0^2 \left\{ 3 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-4} \right. \right. \\
& \left. \left. + 10 \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (4.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{W_3}{\rho g h^2 \sqrt{g h}} &= \frac{3}{32} F_r^2 \lambda_0^2 \left[ 3 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^2 + \frac{1}{18} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^4 - \frac{341}{7560} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^6 + \frac{9}{32} \lambda_0^2 \left\{ \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi h}{L}\right)^{-2} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (4.64)
\end{aligned}$$

図-4.8は、共存系でのエネルギーフラックス $W$ の特性を、

$$W_s = \rho g h^2 \sqrt{g h} \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{4\pi h/L}{\sinh 4\pi h/L} \right) \left( \frac{L}{2\pi h} \tanh 2\pi h/L \right)^{1/2} \right. \right. \\ \left. \left. + F_r \left( \frac{3}{2} + \frac{4\pi h/L}{\sinh 4\pi h/L} \right) \right\} + \frac{1}{2} F_r^3 \right] \dots\dots\dots (4.65)$$

で示した微小振幅波理論による全エネルギーフラックス $W_s$ で無次元化して、 $F_r$ をパラメーターとして示したものであり、図中の記号は図-4.6と同じである。まず、この図より、近似解の収束性はこの場合も全般的に良好であることがわかる。ついで、波の非線形性の影響は、図-4.7と同様に、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるに従って増大するが、 $F_r$ に関しては $F_r = 0$ の場合に最大となり、 $F_r$ が大きくなるに従って逆に減少する傾向が見られる。これは、運動量流束の場合についても述べたように、流れが卓越するに従ってこれらの保存量に占める波の非線形性の影響が相対的に低下するためであり、このことから、エネルギーフラックスについても、流れが卓越している場合には、微小振幅波理論を用いてもほとんど問題ないと言えよう。また、波による質量流束 $Q$ の影響については、 $F_r = 0.2$ の場合には、 $F_r = 0$ の場合と同程度の非線形性の影響が現われている。これは質量流束の影響によるものと考えられることから、 $|F_r| < 0.2$ 程度の流れでは、エネルギーフラックスの場合も質量流束の影響が問題になると言えよう。

#### (6) 極限波高

図-4.9および図-4.10は、Rankine - Stokes<sup>22)</sup>の極限波高の条件を用いて求めた一様流を伴うクノイド波および擬Stokes波の極限波高 $(H/h)_{max}$ と $F_r$ の関係を $T\sqrt{g/h}$ をパラメーターとして示したものである。

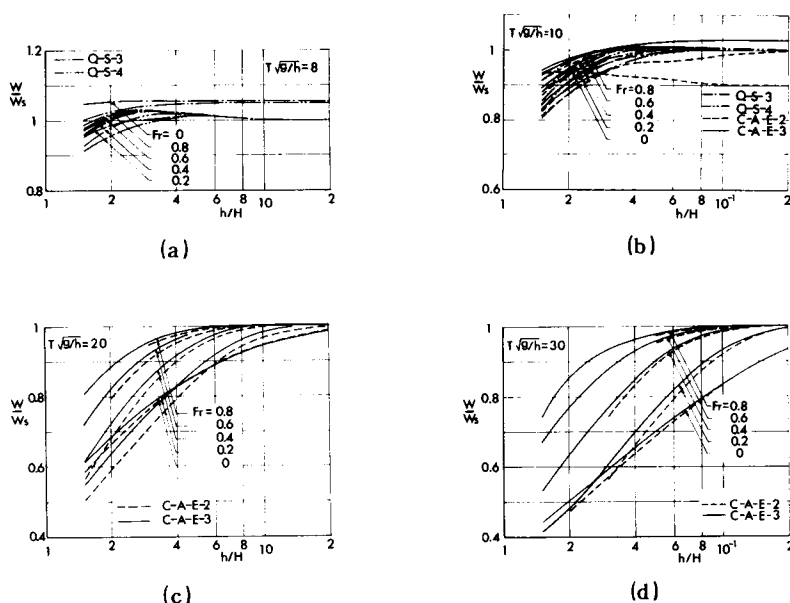


図-4.8 一様流を伴う擬 Stokes 波およびクノイド波のエネルギーフラックスの特性

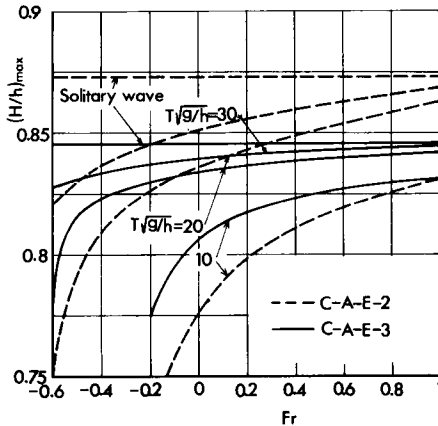


図-4.9 一様流を伴うクノイド波の極限波高

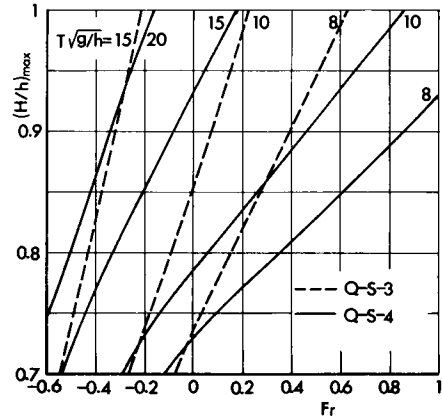


図-4.10 一様流を伴う擬 Stokes 波の極限波高

まず、図-4.9 から、近似解の収束性に若干の問題は見られるが、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなるに従って  $(H/h)_{max}$  の値も大きくなり、孤立波の極限波高に収束する傾向を示すことから、計算結果はほぼ妥当であると考えられる。また、流れが極限波高に及ぼす影響については、 $T\sqrt{g/h}$  および  $Fr$  が大きくなるに従って小さくなる傾向を示し、孤立波に近づくに従って流れに対して独立となるような傾向を示す。また、逆流の場合には、 $(H/h)_{max}$  が急速に減少し、したがって波は砕け易くなり、水粒子速度の鉛直分布の急激な前傾と対応していることがわかる。

ついで、図-4.10 から、近似解の収束性は、一様流を伴うクノイド波の場合に比べてさらに悪くなっていることがわかるが、極限波高  $(H/h)_{max}$  が  $T\sqrt{g/h}$  および  $Fr$  が大きくなるに従って増大する傾向は図-4.9と同様である。

## 第5節 結 語

以上、著者は流れを一様流と仮定し、第2章および第3章で示した通減せつ動法を用いて、一様流を伴うクノイド波理論および擬 Stokes 波理論を展開するとともに、これらの理論を用いて波に及ぼす流れの影響および波の非線形性の影響などを明らかにしたが、以下に各節の主要な結果を要約して結語としたい。

まず、第1節では、従来の流れの場における波に関する研究は、主として流れに対して諸条件を与えて展開されてきたため、その基礎式が複雑になり、解析解の誘導がより困難になってきていることを述べ、共存系での波の非線形性の影響の評価が十分でないことを指摘した。そして、本章では、波の非線形性の影響をできるだけ正確に評価するために、流れに対しては一様流を仮定して、一様流を伴う有限振幅波理論を展開する方針を述べた。

第2節では、まず、一様流を対象とし、さらに非回転性を仮定して、波と流れの共存系における運動方程式および連続式を、速度ポテンシャルと水面変動で表される基礎方程式に書き換え、ついで、第2章で用いた通減せつ動法を適用して、一様流を伴うクノイド波理論の展開を第3次近似解まで行った。ついで、その結果を用いて波速および水粒子速度などに対する数学的表示を与えた。第3節では、第2節で導いた

基礎方程式に、第3章で用いた逐減せつ動法を適用することによって、一様流を伴う擬 Stokes 波理論の展開を第4次近似解まで行った。この場合についても、波形、波速および水平水粒子速度などに対する数学的表示を与えた。

ついで、第4節では、まず第2および第3節で得られた近似解の収束性を、波速および水平水粒子速度に関して検討した。その結果、波速に関しては、無次元周期  $T\sqrt{g/h}$ 、一様流の Froude 数  $F_r$  および水深・波高比  $h/H$  が大きくなるに従って、それらの収束性が良好になることを明らかにした。また、水平水粒子速度に関しても、同様な収束性を確かめたが、波速の場合に比べると、各近似解による相違は大きく、収束性はなお十分でないことがわかった。さらに、波速および水平水粒子速度に対する一様流の影響に関しては、 $T\sqrt{g/h}$  あるいは  $F_r$  が無限大となる極限において波は孤立波に一致し、 $F_r$  に独立となるが、これに対して  $T\sqrt{g/h}$  が小さくなり、しかも  $F_r$  が負で増大すると、 $F_r$  の影響が顕著となるとともに、波の峯付近での水平水粒子速度が急激に増大することがわかった。逆流の場合には、波は流速が群速度に達する前に不安定となって、その上限界が早く現われることがわかった。また、波と流れの場における質量流束、運動量流束、エネルギーおよびエネルギーフラックスに対する数学的表示を与え、これらに対する波による質量輸送の影響を数値計算によって系統的に明らかにした。最後に、Rankine - Stokes の極限波高の条件を用いて共存系における極限波高の計算を行った。その結果、この場合の近似解の収束性については、水粒子速度の場合と同様の傾向があり、また極限波高に及ぼす流速の影響については、逆流の場合に顕著となり、極限波高が急速に減少することが明らかとなった。

#### 参 考 文 献

- 1) Bazin, H. : Recherches Experimentales sur la Propagation des Ondes, Mémoires Divers Savants á l'Académie des Sciences, Vol. 19, 1865, p. 495.
- 2) Boussinesq, J. : Essai sur la Théorie des eaux Courantes, *ibid.*, Vol. 23, 1877, p. 1.
- 3) Biésel, F. : Étude Theorique de la Houle en eau Courante, La Houille Blanche, 1950, pp. 279 - 285.
- 4) Burns, J.C. : Long Waves in Running Water, Pro. Combridge Phil. Soc., Vol. 97, 1953, pp. 243.
- 5) Sarpkaya, T. : Oscillatory Gravity Waves in Flowing Water, Trans. ASCE, No. 2873, 1955, pp. 564-586.
- 6) Benjamin, T.B. : The Solitary Wave on a Stream with an Arbitrary Distribution of Vorticity, Jour. Fluid Mech., Vol. 12, 1961, pp. 7- 16.
- 7) Velthuisen, H.G.M. and L. Van Wijngaarden : Gravity Waves over a Non-Uniform Flow, Jour. Fluid Mech., Vol. 39, pp. 817-829.
- 8) Freeman, N.C. and R.S. Johnson : Shallow Water Waves on Shear Flows, Jour. Fluid Mech., Vol. 42, 1970, pp. 401-409.

- 9) Yih, C.S. : Surface Waves in Flowing Water, Jour. Fluid Mech., Vol. 51, 1972, pp. 209-220.
- 10) Betts, P.L. : Waves on a Stream of Finite Depth Which Has a Velocity Defect near the Free Surface, Jour. Fluid Mech., Vol. 41, 1970, pp. 509-521.
- 11) 浜田徳一 : 流水の中の有限振幅波の計算, 第10回海岸工学講演会講演集, 1968, pp. 1-6.
- 12) 浜田徳一 : せん断流の中の表面波の性質について, 第18回海岸工学講演会論文集, 1971, pp. 111-114.
- 13) Stewartson, K. and J.T. Stuart : A Nonlinear Instability Theory for a Wave System in Plane Poiseuille Flow, Jour. Fluid Mech., Vol. 48, 1971, pp. 529-545.
- 14) Davey, A., L.M. Hocking and K. Stewartson : On the Nonlinear Evolution of Three-Dimensional Disturbances in Plane Poiseuille Flow, Jour. Fluid Mech., Vol. 63, 1974, pp. 529-536.
- 15) Johnson, R.S. : On the Modulation of Water Waves on Shear Flows, Proc. Roy. Soc. London, A. 347, 1976, pp. 537-546.
- 16) Ursell, F. : Steady Wave Patterns on a Non-Uniform Steady Fluid Flow, Jour. Fluid Mech., Vol. 9, 1960, pp. 333-346.
- 17) Yu, Y.Y. : Breaking of Waves by an Opposing Current, Trans. A.G.U., Vol. 33, No. 1, 1952, pp. 39-41.
- 18) Longuet-Higgins, M.S. and R.W. Stewart : The Changes in Amplitude of Short Gravity Waves on Steady Non-Uniform Currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 10, pp. 529-549.
- 19) 岩崎敏夫・佐藤道郎 : 流れを越る波のエネルギーの減衰について, 第17回海岸工学講演会論文集, 1970, pp. 41-46.
- 20) 岩崎敏夫・佐藤道郎 : 流れを越る波のエネルギーの減衰について(II), 第18回海岸工学講演会論文集, 1971, pp. 55-59.
- 21) Whitham, G.B. : Mass, Momentum and Energy Flux in Water Waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 10, 1961, pp. 135-147.
- 22) Lenau, C.W. : The Solitary Wave of Maximum Amplitude, Jour. Fluid Mech., Vol. 26, 1966, pp. 309-320.

## 第5章 浅海における波の変形に関する研究

### 第1節 概 説

本章では、前述した有限振幅波理論の一つの適用例として、水深および流れの空間的变化によって生じる波の一次元的変形を取扱う。このうち、前者は通常波の浅水変形 (wave shoaling) といわれる。こうした波の変形に関する取り扱いとしては、波動の基礎方程式を直接数値的に解く方法、あるいは簡略化した基礎方程式を解析的または数値的に解く方法、さらには波のエネルギーフラックスの保存則を適用するいわゆるエネルギーフラックス法などがあるが、いずれの方法にも一長一短があり、現在なお決定的手法は確立されていないようである。

数値計算による手法においては、MAC法<sup>1)</sup>およびSUMMAC法<sup>2)</sup>などが知られている。たとえば、SUMMAC法を用いてChanら<sup>3)</sup>によって行われた斜面上での波の変形計算では、浅水変形に伴う波高の増大とともに、波形の前傾化の生じることが示されている。このように、この手法は、斜面の条件をあらわに含む基礎方程式の数値解を直接求めているため、実際の変形によく対応した結果を与えることができるが、波の変形特性を表す一般的な関係式を導くには適していない。

一方、解析的な手法としては、傾斜海浜における波動の基礎方程式から、その線形解によって変形を論じたLewy<sup>4)</sup>、Stoker<sup>5)</sup>、Friedrichs<sup>6)</sup>およびKeller<sup>7)</sup>などによるものがあるが、波の非線形効果および分散効果は十分には評価されていない。また、Amein<sup>8)</sup>は線形理論と非線形理論の併用によって、その究明に努めたが、波の分散効果を評価していないために、その適用は段波の場合に限られている。同様な研究は長波近似の適用によって岩垣<sup>9)</sup>らによっても行われ、波の変形に及ぼす斜面こう配の影響が明らかにされているが、その適用においては同様な限界が考えられよう。これに対し、Peregrine<sup>10)</sup>およびMeiら<sup>11)</sup>は非線形効果および分散効果に加えてこう配の効果をも同時に考慮した浅水近似による非線形方程式を誘導し、その数値計算を試みた。また、Madsenら<sup>12)</sup>はMeiら<sup>11)</sup>によって誘導された方程式の数値解を求めて、浅水変形においては、波の非線形効果のみならず分散効果も重要となることを明らかにした。その後、Johnson<sup>13)</sup>および角谷<sup>14)</sup>はそれぞれ独自に、いわゆるK-dV方程式にこう配の効果を加えて斜面上での水面変動に関する非線形方程式を誘導し、波の変形に対する取り扱いをさらに容易にした。しかしながら、現在のところ、まだこの式の厳密解は求められておらず、著者ら<sup>15)</sup>によるその数値解と実測波形との比較や、Ottら<sup>16)</sup>の研究を基礎とした首藤<sup>17)</sup>の試みがあるだけである。この手法では、こう配の影響が評価されず、波形の前傾や尖鋭化の現象は当然のことながら説明できない。このほか、multiple scaleの方法<sup>18)</sup>を用いたSvendsen<sup>19)</sup>の試みがあり、この手法では斜面こう配の影響は非線形項や分散項に比べて1次オーダーが低いとして理論展開されているため、こう配の影響は十分には評価されておらず、その適用はかなりの緩こう配の場合に限られよう。このように、解析的な手法においては、波の非線形および分散性と傾斜海浜のこう配の効果を考慮した水面変動に関する波動方程式が導かれているが、十分な精度を持つ解析解は得られておらず、数値計算によらざるを得ないのが現状のようであり、前述の数値計算による方法の労力を若干減

少させているに留まっている。

つぎに、波のエネルギーフラックスの保存則による方法としては、いわゆる Rayleigh の仮定<sup>20)</sup>に基づく方法があり、この手法では海浜こう配の効果とくに波形の前傾を論ずることはできないが、その取扱いはきわめて有効である。すなわち、この方法では一般に有限振幅波の表示は一様水深場でのものを用い、斜面上や流れの場においても、理論上波は定形波としての特性を維持しつつ伝播することになり、その保存則に適切な有限振幅波理論を適用して、波高および波長の変化を求めることができる。このため、従来から、エネルギーフラックス法を用いた波の変形に関する研究は数多く行われ、とくに斜面上での変形については、Mason<sup>21)</sup>の微小振幅波理論によるもの、Le Méhauté ら<sup>22)</sup>の Stokes 波理論の第 3 次近似解を用いたもの、また Ippen ら<sup>23)</sup>や Camfield ら<sup>24)</sup>の孤立波理論を用いたもの、Mash<sup>25)</sup>のクノイド波理論を用いた試み、岩垣<sup>26)</sup>の hyperbolic 波理論を用いたもの、Svendsen ら<sup>27)</sup>のクノイド波理論の第 1 次近似解を用いたもの、さらに山口<sup>28)</sup>の Stokes の波速の定義を考慮したクノイド波理論の第 2 次近似解を用いたものなどがある。一方、流れの場での波の変形については、逆流によって生じる砕波を取り扱った Yu<sup>29)</sup>の研究をはじめとして、Jonsson ら<sup>30)</sup>および黄<sup>31)</sup>による波の変形に関する研究がある。これらは、流速の空間的変化を無視した取り扱いであるが、空間的变化を考慮したエネルギーフラックス法による取り扱いが、Longuet-Higgins ら<sup>32)</sup>および Phillips<sup>33)</sup>によって行われ、radiation stress を媒介とした波と流れの相互作用から、前者とかなり異なった結果を与えることが示されている。さらに、また最近岩垣<sup>34)</sup>は同様な手法による流れに伴う波の屈折と波高変化を計算している。

以上、流れの影響をも含めた波の浅水変形に関する従来の研究について若干の考察を行ったが、第 2 章、第 3 章および第 4 章で展開した有限振幅波理論の適用によって、波の変形特性を究明するために、Rayleigh の仮定に基づくエネルギーフラックス法を用いることにする。

ところで、この方法は、当然、保存則より導かれる基礎方程式およびこれに適用すべき有限振幅波理論に依存するため、これらが適切であることが必須となる。前者の問題としては、波数の保存則より導かれる周期が不変という仮定が、クノイド波の適用において必ずしも自明でないという問題のほかに、流れの場での波の変形の計算に用いられるエネルギーフラックスの表示が、Phillips<sup>33)</sup>、Jonsson ら<sup>30)</sup>および黄<sup>31)</sup>によってそれぞれ異なっているために、浅水変形の計算結果も異なったものになるという問題がある。さらに、後者の問題としては、従来の有限振幅波理論には、波速の任意性の問題があって、たとえば山口<sup>28)</sup>によって明らかにされたように、用いる波速の定義に応じて波の変形特性も理論上異なったものになっている。

そこで、本研究では、前者の問題については基礎となる保存則から用いるべき基礎的關係式を導き、後者の問題については著者が提案した有限振幅波理論を適用して、前述のエネルギーフラックス法による波の変形の計算を行う。

## 第 2 節 基礎方程式の誘導

波の周期が場所的に変化しないという仮定は、定常場での波数の保存則からも形式的に確かめられるが、クノイド波理論では、角周波数  $n$  と周期  $T$  との間に、波の特性に応じて変化する第 1 種完全だ円積分  $K(k)$

を媒介とした

$$n = 2K(k)/T \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

の関係があるために、周波数  $n$  が一定であっても周期  $T$  は必ずしも一定とはならない。この点を明らかにするためには、斜面上での波の理論の展開が必要となってくるので、ここでは従来と同様、周期は場所的に一定であると仮定し、問題点の指摘に留めておこう。

また、流量  $Q_0$  の定常な流れの場合での波の変形を扱う場合には、質量に関する保存式が必要となり、それは式 (4.25) より次式で表される。

$$\frac{dQ_0}{dx} = 0, \quad \text{すなわち } Q_0 = \rho(d + \delta_0)U + Q = \text{const} \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

ここに、 $\delta_0$  : 平均水位と静水位との差、および  $d$  : 静水深を示し、平均水深  $h$  とは  $h = d + \delta_0$  の関係にある。これから、任意水深での流速  $U$  は、

$$U = \frac{Q_0}{\rho(d + \delta_0)} - \frac{Q}{\rho(d + \delta_0)} \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

で表され、 $Q_0$  のみならず  $Q$  および  $\delta_0$  にも依存することがわかる。 $Q$  は式 (4.27) で表されているが、 $\delta_0$  は式 (4.27) に示した運動量の保存則を用いて、次式で与えられる。

$$\frac{d}{dx} (M + S) = -\rho g (d + \delta_0) \frac{d\delta_0}{dx} \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

さらに、波のエネルギーフラックスの表示については、前述したような表示の不統一があり、この問題を解決するためには、非定常項を残したエネルギー保存則に立ち返る必要がある。流れのある場合での静水面を基準にしたエネルギー保存則としては、すでに示した式 (4.41) のほかに、流れの場合での波のエネルギーに関する保存則を考えることができ、それぞれ Phillips<sup>33)</sup> の表示にならって示すと、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{Q_0}{2\rho(d + \delta_0)} + \frac{\rho g}{2} (\delta_0 - d) - \frac{Q^2}{2\rho(d + \delta_0)} + E \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{Q_0^3}{2\rho^2(d + \delta_0)^2} + g\delta_0 Q_0 \right. \\ \left. + \frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d + \delta_0)^2} + UE + W_0 + US \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (5.5) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ E - \frac{Q^2}{2\rho(d + \delta_0)} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ UE + W_0 - \frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d + \delta_0)^2} \right\} + S \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots (5.6)$$

ここに、 $E$ 、 $S$  および  $W_0$  などの記号は式 (4.52) におけるものと一致している。これら両式はいずれも共存系でのエネルギー保存則であることから、いずれを用いてもよく、Longuet-Higgins ら<sup>32)</sup> や Phillips<sup>33)</sup> は定常場での式 (5.6) を用いて波の変形の計算をしている。しかしながら、エネルギーフラックス法では、通常流速の空間的变化を無視するため、radiation stress の影響が無視され、次式に示すエネルギーフラックスの表示が用いられる。

$$UE + W_0 - \frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d + \delta_0)^2} = \text{const} \quad \dots\dots\dots (5.7)$$



これに対して黄ら<sup>31)</sup>は、定常場での式(5.5)より導かれるエネルギーフラックスの表示式(5.8)を用いている。

$$\frac{Q_0^3}{2\rho^2(d+\delta_0)^2} + g\delta_0 Q_0 + \frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d+\delta_0)^2} + U E + W_0 + U S = W = \text{const} \quad \dots\dots (5.8)$$

この場合には、流速 $U$ の空間的变化を無視しても radiation stress の影響は評価されることになるが、式(5.5)の第1項に水深 $d$ が含まれているため、この式の深海波への直接の適用は不可能となる。このため、こうした計算を行った黄ら<sup>30)</sup>の結果には若干問題があると言えよう。また、Jonsson ら<sup>30)</sup>は、波と流れの場で Bernoulli 式の表示から、水深の減少に伴って海底こう配に関係なくいわゆる set down が生じることを示すとともに、平均エネルギー水頭を基準にした全平均エネルギーの保存則より、次式のようなエネルギーフラックスの表示を導いている。

$$\left(1 + \frac{U}{c_g}\right) (U + c_g) E = \text{const} \quad \dots\dots\dots (5.9)$$

ここに、 $c_g$ は波のエネルギー輸送速度である。ところで、Jonsson らによって行われた平均エネルギー水頭の計算になお速度ポテンシャルに対して周期性を仮定するという問題があることに加えて、さきのエネルギー保存則の深海波への適用に黄らの場合と同様の問題が指摘されよう。これらのことから、著者は平均エネルギー水頭の計算上の問題点を解決するとともに、平均エネルギー水頭を基準にした式(5.5)および(5.6)に対応するエネルギーの保存則をそれぞれ次式のように導いた。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{Q_0^2}{2\rho(d+\delta_0)} - \frac{Q^2}{2\rho(d+\delta_0)} + E + \frac{\rho g}{2} (\delta_e^2 - h_e^2) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{Q_0^2}{2\rho^2(d+\delta_0)^2} + \frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d+\delta_0)^2} \right. \\ \left. + U E + W_0 + U S - g\delta_e Q_0 \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (5.10) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ E - \frac{Q^2}{2\rho(d+\delta_0)} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ U E + W_0 - \frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d+\delta_0)^2} \right\} + S \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots (5.11)$$

ここに、 $h_e$ は平均エネルギー水頭であり、 $\delta_e$ は次式で表される。

$$\delta_e = h_e - d \quad \dots\dots\dots (5.12)$$

これより、式(5.11)は式(5.6)に一致することがわかり、また式(5.6)は深海波への適用が可能であることから、式(5.4)の左辺をゼロと仮定すれば、結局波と流れの共存系でのエネルギーフラックスの表示としては式(5.7)を用いればよいことがわかる。したがって、ここでは波の変形の計算に用いる保存則として、周期一定の条件に加えて次式を挙げることができる。

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{Q_0}{\rho h} - \frac{Q}{\rho h} \\ U E + W_0 - \frac{Q_0 Q^2}{(\rho h)^2} &= \text{const} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.13)$$

さて、概説で述べたように、有限振幅波理論として Stokes 波理論の第 4 次近似解、新しいクノイド波理論の第 3 次近似解および擬 Stokes 波理論の第 4 次近似解を用いることにすれば、式 (5.13) を用いて波の浅水変形をつぎのように取り扱うことができる。

まず、Stokes 波理論および擬 Stokes 波理論を用いた場合には、次式が得られる。

$$\begin{aligned} (1 + A_0^2) \left( \frac{h}{L_0} \right) - \left( \frac{2\pi h}{L} \right) \left[ 1 + F_r - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{19}{45} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{55}{3024} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{2941}{604800} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^8 \right. \\ \left. + \frac{9}{128} \lambda_0^2 \left\{ 2 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + 1 \right\} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (5.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_r = \frac{Q_0}{\rho g^2 T^3} - \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left\{ 3 - \frac{1}{6} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{7}{18} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{341}{7560} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 \right\} \\ - \frac{9}{32} \lambda_0^4 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \left\{ 1 + \frac{3}{32} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (5.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} (T \sqrt{\frac{g}{h}})^{-3} \left( \frac{h}{L_0} \right)^{-4} A_0^2 \left( 1 + \frac{3}{4} A_0^2 \right) = \frac{1}{8} \lambda_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{19}{72} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 \right. \\ \left. + \frac{133}{3024} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 + F_r \left\{ 1 + \frac{11}{60} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4 + \frac{13}{105} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^6 \right\} \right] + \frac{1}{512} \lambda_0^4 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \\ \left[ 9 + 15 \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 + F_r \left\{ \frac{27}{2} + \frac{32}{2} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (5.16) \end{aligned}$$

ここに、 $L_0$  は沖波の波長である。

また、Stokes 波理論および新しいクノイド波理論を用いた場合にはつぎのようになる。

$$\begin{aligned} 2K \left\{ \frac{h}{2\pi L_0} (1 + A_0^2) \right\}^{1/2} - \frac{1}{2k} (3\lambda)^{1/2} \left( 1 + F_r - \frac{\lambda}{2k^2} \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{40k^4} \left[ 45 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + 19k^4 - 64k^2 + 64 \right] - \frac{\lambda^3}{5600k^6} \left[ 10 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ 6927 \left( \frac{E}{K} \right) + 10799k^2 - 14112 \right\} - 2 \left( \frac{E}{K} \right) \left\{ 4603k^4 + 77092k^2 - 80317 \right\} - 24155k^6 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 74838k^4 - 5959k^2 - 41974 \right] \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (5.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_r = \left( \frac{Q_0}{\rho g^2 T^3} \right) (T \sqrt{\frac{g}{h}})^{-3} - \frac{\lambda^2}{2k^4} \left[ -\frac{E}{K} \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] - \frac{\lambda^3}{20k^6} \left[ 145 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \right. \\ \left. \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} + \left( \frac{E}{K} \right) (34k^4 - 179k^2 + 179) - 17(k^4 - 3k^2 + 2) \right] \quad \dots\dots (5.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} (T \sqrt{\frac{g}{h}})^{-3} \left( \frac{h}{L_0} \right)^{-4} A_0^2 \left( 1 + \frac{3}{4} A_0^2 \right) = \frac{\lambda^2}{3k^4} (1 + F_r) \left[ -\frac{E}{K} \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] \\ + \frac{\lambda^3}{30k^6} \left[ 255 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left( \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right) + \frac{E}{K} (58k^4 - 313k^2 + 313) - 29k^4 + 87k^2 - 58 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda^3}{30k^6} F_r \left[ 195 \left( \frac{E}{K} \right)^2 \left\{ \frac{E}{K} + k^2 - 2 \right\} + \frac{E}{K} (48k^4 - 243k^2 + 243) - 24k^4 + 72k^2 - 48 \right] \\
& + \frac{\lambda^4}{4200k^8} \left[ -25 \left( \frac{E}{K} \right)^3 \left\{ 8463 \left( \frac{E}{K} \right) + 11732k^2 - 22792 \right\} - \left( \frac{E}{K} \right)^2 (127211k^4 - 567161k^2 \right. \\
& + 555961) - \frac{E}{K} (16642k^6 - 152174k^4 + 351070k^2 - 232180) + 8321k^6 - 42765k^4 \\
& + 68888k^2 - 34444 \left. \right] + \frac{\lambda^4}{4200k^8} F_r \left[ -25 \left( \frac{E}{K} \right)^3 \left\{ 5565 \left( \frac{E}{K} \right) + 7868k^2 - 15064 \right\} \right. \\
& - \left( \frac{E}{K} \right)^2 (89516k^4 - 384566k^2 + 373366) - \left( \frac{E}{K} \right) (11952k^6 - 107444k^4 + 245020k^2 \\
& - 161480) + 5976k^6 - 31565k^4 + 51178k^2 - 25589 \left. \right] - \frac{\lambda^4}{4k^8} F_r \left[ -\frac{E}{K} \left\{ 3 \left( \frac{E}{K} \right) + 2k^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - 4 \right\} + k^2 - 1 \right]^2 \dots\dots\dots (5.19)
\end{aligned}$$

### 第3節 傾斜海浜における波の変形

ここでは、浅水変形の特徴を波高および波長変化に関して明らかにする。

#### (1) 波の変形の計算

この場合には流れが存在せず、 $F_r = 0$ であるから、 $H_0/L_0$ および $h/L_0$ を与えて $H/H_0$ および $L/L_0$ を求めることになる。なお、第2章および第3章において明らかにしたように、ここで用いる新しいクノイド波理論および擬 Stokes 波理論の適用領域は、せつ動解の収束性から判断してそれぞれは  $T\sqrt{g/h} \gtrsim 10$  および  $15 \gtrsim T\sqrt{g/h} \gtrsim 8$  であると考えられることから、式(5.17)および(5.19)については  $h/L_0 \leq 0.05$  の領域において用い、式(5.13)および(5.15)については  $0.05 \leq h/L_0 \leq 0.1$  の領域において用いることにした。そして、以上の各式において  $F_r = 0$  とおき、逆補間法および regular falsi 法の併用によって各式を同時に  $10^{-8}$  の精度で解いた。また、極限波高の計算については、Rankine-Stokes の極限波高の条件を用いた。

#### (2) 波の変形特性

図-5.1 および図-5.2 は、それぞれ  $H/H_0$  および  $L/L_0$  と  $h/L_0$  との関係を、 $H_0/L_0$  をパラメータとして示したものであり、図中の breaking inception は前述の方法で求めたものである。なお、 $h/L_0 \leq 0.05$  の計算結果については、その収束性を検討するため、第1次および第2次近似解による計算結果も併せて示した。

まず、図-5.1 から、近似の程度による相違は  $H_0/L_0$  の増大とともに顕著になり、特に breaking inception および  $h/L_0 \sim 0.05$  付近において顕著になることがわかる。しかしながら、近似の高次化に

伴って、近似解が一様に収束する傾向が見られるとともに、第3次近似解では微小振幅波理論による結果への収束性がきわめて良好となることから、ここに示した第3次近似解による結果は、波高変化に関する浅水変形の理論として十分な精度を持つものと言えよう。

ついで、波長変化を示した図-5.2からも、図-5.1と同様な傾向が見られるが、近似解による相違はさらに小さくなっており、第3次近似解の収束性は良好であることがわかる。このことは、近似解による相違が波速に関しては比較的小さく、特に  $T\sqrt{g/h} \geq 2.0$  ではその相違をほとんど無視できることの結果と考えられる。また、クノイド波理論および擬 Stokes 波理論によるそれぞれの結果が  $h/L_0 = 0.05$  において滑らかに接続しているが、これは、擬 Stokes 波の波動方程式がクノイド波のものと類似しており、その波動解の特性がこの付近においてはほぼ一致したものになることの結果と考えられる。

さらに、Chappellear<sup>35)</sup>のクノイド波理論に Stokes の波速の第1および第2定義を適用して、山口らが示したクノイド波の波高変化の計算結果と図-5.1に示した第3次近似解による計算結果との比較を図-5.3に示す。これから、第2次近似解と第3次近似解の比較という近似の相違の問題はあるが、波速の定義を必要としない著者の計算結果は、第2定義による結果と対応しており、第1定義による結果は図-5.1の第2次近似解の結果と対応しているようであることから、波速の定義による相違は近似解による相違の程度であることがわかる。そして、波速の定義の影響は、近似の高次化に伴って重要となるため、波の浅水変形の計算に対しても波速の定義に依存しない理論を用いることは十分に意義があると言えよう。

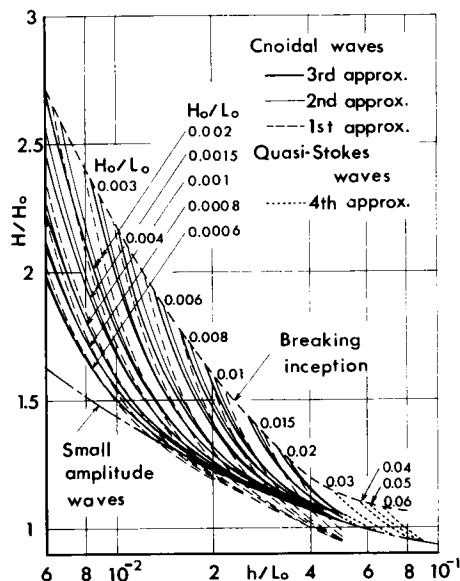


図-5.1 擬 Stokes 波理論および新しいクノイド波理論に基づく水深変化に伴う波高変化の計算結果

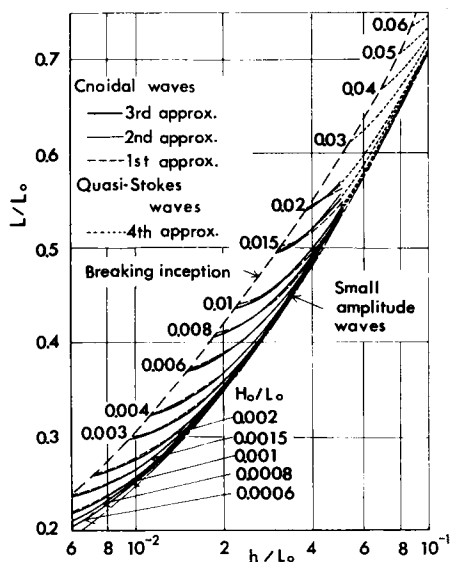


図-5.2 擬 Stokes 波理論および新しいクノイド波理論に基づく水深変化に伴う波長変化の計算結果

## 第4節 流れによる波の変形

### (1) 波の変形の計算

この場合には、第2節で導いた基礎方程式がそのまま用いられ、 $H_0/L_0$  および  $h/L_0$  のほかにさらに  $F_r$  を与えて  $H/H_0$  および  $L/L_0$  を求めることになるが、単位幅流量  $Q_0$  を一定とする場合には  $F_r$  の代わりに  $Q_0$  を与え、式 (5.14) および (5.18) より  $F_r$  を求めて計算する必要がある。このため、 $Q_0$  を与えて計算する場合には、式 (5.13) (5.14) および (5.15) の各式と式 (5.17)、(5.18) および (5.19) の各式をそれぞれ同時に解かねばならない。なお、各式を用いる領域は第3節の場合と同様にし、また数値計算も同様に行う。さらに、極限波高の計算についても第4章で展開した理論に Rankine-Stokes の極限波高の条件をそのまま適用して行うことにする。

### (2) 波の変形特性

図-5.4 および図-5.5 は、水深とともに流速の変化する一定流量の場に波が侵入してきたときに生じる変形を示したもので、 $H/H_0$  および  $L/L_0$  と  $h/L_0$  との関係をも  $H_0/L_0$  および  $Q_0/\rho g^2 T^3$  をパラメータ

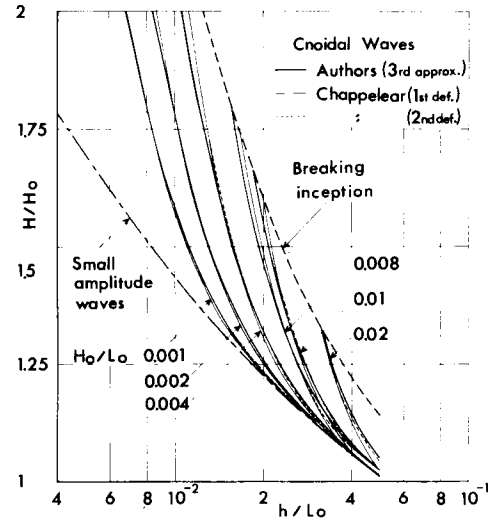
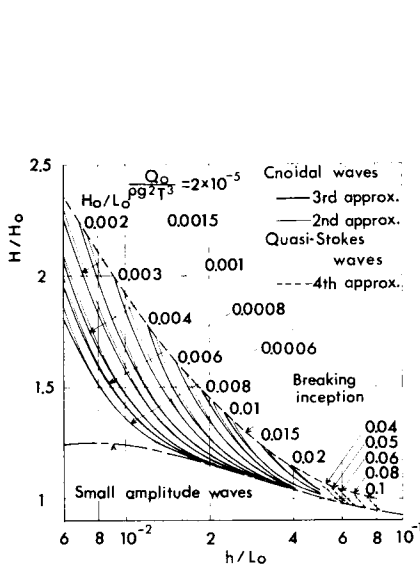
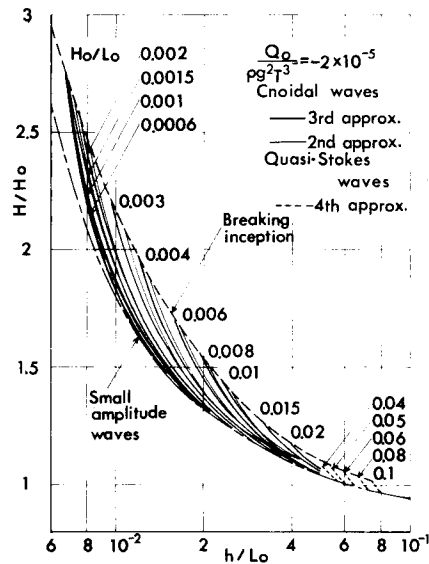


図-5.3 山口らによる計算結果との比較



(a)



(b)

図-5.4 擬 Stokes 波理論および新しいクノイド波理論に基づく一定流量の場での水深変化に伴う波高変化の計算結果

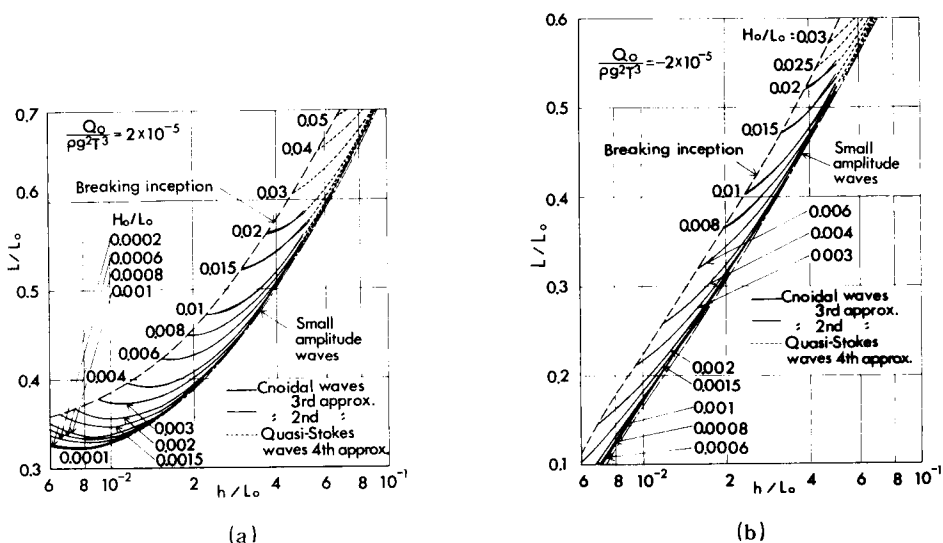


図-5.5 擬 Stokes 波理論および新しいクノイド波理論に基づく一定流量の場合での水深変化に伴う波高変化の計算結果

として示している。なお、図中  $Q_0 > 0$  は順流、および  $Q_0 < 0$  は逆流を示す。この場合については、新しいクノイド波理論の第2次近似解による結果を併せて示したが、これから、図-5.1および図-5.2に比べて収束性がきわめて良好であり、流れのある場合についてもクノイド波理論の第3次近似解による結果は十分な精度を持つことがわかる。

まず、順流の場合には、 $H_0/L_0 \sim 0.0002$  付近を境にして  $h/L_0$  に対する  $H/H_0$  の特性が変化し、 $H_0/L_0 > 0.0002$  では非線形効果のために微小振幅波理論による結果と相反した特性を示している。しかしながら、波長の変化については、そうした傾向は見られず、いずれの  $H_0/L_0$  の値に対しても  $h/L_0$  に対する  $L/L_0$  の変化に極値の生じる傾向が見られ、流れのない場合との相違がよく現われている。この

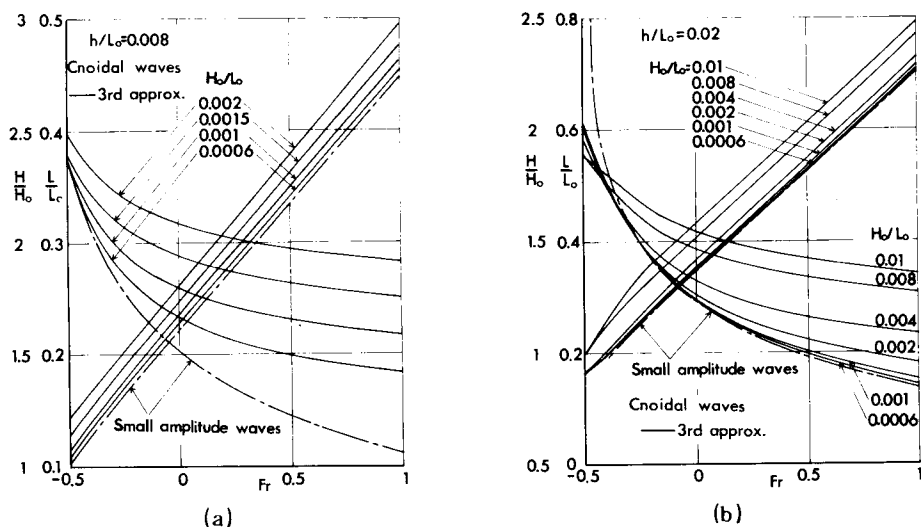


図-5.6 新しいクノイド波理論に基づく一定水深の場合での流れによる波の変形に関する計算結果

ように、順流の場合の波高変化に対しては、水深および流速変化による相反効果に非線形効果が加わるために、微小振幅波理論による結果と異なった結果が生じるが、波長変化に対しては $H_0/L_0$ に関係なく流れの影響が現われることがわかる。

一方、逆流の場合には、相反効果は現われておらず、両者の効果は一致していることがわかるとともに、波長が短くなるために非線形性の卓越が抑えられ、微小振幅波理論による結果との相違は小さくなる傾向にあることがわかる。

図-5.6は、 $H_0/L_0$ をパラメーターとして各 $h/L_0$ の位置での $H/H_0$ および $L/L_0$ と $F_r$ の関係を示したもので、これから同一の $H_0/L_0$ に対して $h/L_0$ の減少とともに $F_r$ の影響も減少することがわかる。これは、長波性の波になるに従って、流れの影響を受け難くなることを示し、すでに第4章で示した一様流を伴う有限振幅波の特性と一致している。また、 $F_r$ の影響は $H_0/L_0$ の小さい波に対してより顕著であることがわかるが、これは、エネルギー輸送速度が $H_0/L_0$ の減少とともに小さくなって、逆流の場合に $H_0/L_0$ のより小さい波において顕著な波高の増大を生じさせることに加えて、順流の場合には波長の伸長によって非線形効果が卓越するようになり、 $H_0/L_0$ の大きい波の波高の減少が抑えられることの結果と考えられる。

## 第5節 結 語

以上、第2章、第3章および第4章において展開した有限振幅波理論を適用したエネルギーフラックス法によって波の変形の計算を行い、傾斜海浜および流れの存在する場合での波の変形特性を明らかにしたので、各節の主要な結果を要約して結語としたい。

まず第1節では、水深および流速の変化する場合での波の一次元的変形を取り扱う方法について考察した。そして、有限振幅波理論の適用によってこうした波の変形を取り扱う立場から、エネルギーフラックス法を用いることとし、その問題点を指摘した。

第2節では、波の変形計算において用いるべき保存則について検討した結果、クノイド波理論を適用する場合には波の周期を一定とする仮定は必ずしも自明ではないが、規則波を対象とする限り現時点ではこの仮定を用いるべきことを述べた。ついで、流れのある場合でのエネルギーフラックスの表示がPhillips, Jonssonらおよび黄らによって不統一に与えられていることを指摘し、用いるべき表示を示した。さらに、こうして得られた保存則にStokes波理論と著者の有限振幅波理論を適用して、Stokesの波速の定義に依存しない基礎方程式を導いた。

第3節では、水深変化に伴う波高および波長変化の計算を行った結果、新しいクノイド波理論の第2および第3次近似解による相違は小さくて収束性がよく、また水深・沖波波長比 $h/L_0$ が大きくなると微小振幅波理論による結果へ近づく傾向は第3次近似解において良好であることを明らかにした。浅水変形に及ぼす波速の定義の影響を明らかにするために、Chappellearのクノイド波理論に波速の第1および第2定義を用いて波高の変化を計算した山口らの結果との比較を行ったが、波速の定義による相違は有限振幅波理論の近似解による影響と同程度であり、高次近似解ほど波速の定義の影響が現われることを明らかにした。

第4節では、まず流れによる波の波高および波長の変化の計算を行って、波の変形における近似解の収束性が良好であることを確かめた。この場合の波の変形の特性としては、順流の場合には波に及ぼす水深変化と流れの影響の間に相反効果が現れ、波長の変化には波形こう配に関係なく極値が生じ、また波高変化でも十分に小さい波形こう配の場合には生じるが、波形こう配が大きくなると水深の減少に伴って単調に波高は増大し、有限振幅波の変形が特徴づけられることを明らかにした。一方、逆流の場合にはこうした相反効果は現れず、波高および波長変化のいずれについても、微小振幅波と有限振幅波の間の相違は、順流の場合に比べて小さくなることがわかった。ついで、一定水深で流速を変化させた場合の波の変形については、水深・沖波波長比が小さく、また波形こう配が大きくなるに従って、波に及ぼす流れの影響は波の非線形性のために、かえって小さくなる傾向にあることを明らかにした。

#### 参 考 文 献

- 1) Welch, J.E., F.H. Harlow, J.P. Shannon and B.J. Daly : THE MAC METHOD, A Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid-Flow Problems Involving Free Surfaces, LA-3425, UC-32, Mathe. and Computers, TID-4500, 1966.
- 2) Chan, R.K.C., R.L. Street and J.E. Fromm : The Digital Simulation of Water Waves - An Evaluation of SUMMAC, Proc. 2nd Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, 1970, pp.429-434.
- 3) Chan, R.K.C. and R.L. Street : Shoaling of Finite-Amplitude Waves on Plane Beach, Proc. 12th Conf. on Coastal Engg., 1970, pp.345-361.
- 4) Lewy, H. : Water Waves on Sloping Beaches, Bulletin of the American Math. Soc., Vol. 52, 1946.
- 5) Stoker, J.J. : Surface Waves in Water of Variable Depth, Quarterly of Appl. Math., Vol. V, No. 1, 1947, pp. 1-54.
- 6) Friedrichs, K.O. : Water Waves on a Shallow Sloping Beach, Commun. on Pure and Appl. Math., Vol. 1, 1948, pp. 109-134.
- 7) Keller, J.B. : Surface Waves on Water of Non-Uniform Depth, Jour. Fluid Mech., Vol. 4, 1958, pp. 607-614.
- 8) Amein, M. : A Method for Determining the Behavior of Long Waves Climbing a Sloping Beach, Jour. Geophy. Res., Vol. 71, No. 2, 1966, pp. 401-410.
- 9) 岩垣雄一・酒井哲郎 : 一様勾配斜面上の有限振幅長波について, 土木学会論文報告集, 第196号, 1971, pp. 65-74.
- 10) Peregrine, D.H. : Long Waves on a Beach, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, 1967, pp. 815-827.



- 11) Mei, C.C. and B. Le Méhauté : Note on the Equations of Long Waves over an Uneven Bottom, Jour. Geophy. Res., Vol. 71, No. 2, 1966, pp. 393-400.
- 12) Madsen, O.S., C.C. Mei and R.P. Savage : The Evolution of Time-Periodic Long Waves of Finite Amplitude, Jour. Fluid Mech., Vol. 44, 1970, pp. 195-208.
- 13) Johnson, R.S. : On the Development of a Solitary Wave Moving over an Uneven Bottom, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 73, 1973, pp. 183-203.
- 14) Kakutani, T. : Effect of an Uneven Bottom on Gravity Waves, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 30, No. 1, 1971, pp. 272-276.
- 15) 土屋義人・安田孝志 : 浅海における波の変形 - 特に soliton の発生について - , 第 20 回海岸工学講演会論文集, 1973, pp. 397-401.
- 16) Ott, E. and R.N. Sudan : Nonlinear Theory of Ion Acoustic Waves with Landau Damping, The Physics of Fluids, Vol. 12, No. 11, 1969, pp. 2388-2394.
- 17) Shuto, N. : Shoaling and Deformation of Nonlinear Long Waves, Coastal Engg. in Japan, Vol. 16, 1973, pp. 1-12.
- 18) Kawahara, T. : Derivative-Expansion method for Nonlinear Waves on a Liquid Layer of Slowly Varying Depth, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 38, No. 4, 1975, pp. 1200-1206.
- 19) Svendsen, I.A. : Cnoidal Waves over a Gentle Sloping Beach, Series Paper 6, Inst. Hydrodyn. and Hydraulic Engg., Tech. Univ. Denmark, 1974, pp. 175.
- 20) Rayleigh, L. : Hydrodynamical notes, Phil. Mag., Ser. 6, Vol. 21, 1911, pp. 177-187.
- 21) Mason, M.A. : The Transformation of Waves in Shallow Water, Proc. 1st Conf. Coastal Engg., 1950, pp. 22-32.
- 22) Le Méhauté, B. and L.M. Webb : Periodic Gravity Waves over a Gentle Slope at a Third Order Approximation, Proc. 9th Conf. on Coastal Engg., 1964, pp. 23-40.
- 23) Ippen, A.T. and G. Kulin : The Shoaling and Breaking of the Solitary Wave, Proc. 5th Conf. on Coastal Engg., 1954, pp. 27-47.
- 24) Camfield, F.E. and R.L. Street : Shoding of Solitary Waves on Small Slopes, Proc. ASCE, WH, 1969, pp. 1-22.
- 25) Mash, F.D. : Cnoidal Waves in Shallow Water, Proc. 9th Conf. on Coastal Engg., 1964, pp. 1-21.
- 26) 岩垣雄一・酒井哲郎 : 有限振幅波の Shoaling について, 第 14 回海岸工学講演会講演集, 1967, pp. 1-7.

- 27) Svendsen, I. A. and O. Brink-Kjaer : Shoaling of Cnoidal Waves, Proc. Conf. on Coastal Engg., 1972, pp. 365-383.
- 28) 山口正隆・土屋義人：有限振幅波理論に基づく波の Shoaling について，第 22 回海岸工学講演会論文集，1975, pp. 59-63.
- 29) Yu, Yi-Yuan : Breaking of Waves by an Opposing Current, A.G.U., Vol. 33, No. 1, 1952, pp. 39-41.
- 30) Jonsson, I. G., C. Skougaard and J. D. Wang : Interaction between Waves and Currents, Proc. 11th Conf. on Coastal Engg., 1970, pp. 489-507.
- 31) 黄煌輝・郭金棟：流れの中における Stokes 波の Shoaling について，第 22 回海岸工学講演会論文集，1975, pp. 69-73.
- 32) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart : The Changes in Amplitude of Short Gravity Waves on Steady Non-Uniform Currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 10, 1961, pp. 529-549.
- 33) Phillips, O. M. : The Dynamics of the Upper Ocean, Cambridge Univ. Press, 1966, pp. 261.
- 34) Iwagaki, Y., T. Sakai, T. Tsuda and Y. Oka : Wave Refraction and Wave Height Variation Due to Current, Bull. D.P.R.I., Kyoto Univ., Vol. 27, 1977, pp. 73-91.
- 35) Chappellear, J. E. : Shallow-Water Waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 67, No. 12, 1962, pp. 4693-4704.

## 第6章 結 論

以上、著者は本論文において、浅海における有限振幅波の特性を究明するために、通減せつ動法を用いて有限振幅波理論を展開し、系統的な基礎研究を行ったが、得られた研究成果を要約して、本論文の結論としたい。

まず第1章においては、沿岸海域における水理現象の解明には、波の特性の究明が必須となることを説明し、かような浅海においては波の非線形性が卓越してくるため、より精度の高い有限振幅波理論の展開が要求されることを述べた。しかるに、従来の有限振幅波理論には波速の決定における任意性の問題があるために、有限振幅波の特性、とくに波の質量輸送とそれに伴う漂砂、海浜流などの輸送現象の究明においてこのことが障害となっているので、この問題を解決した有限振幅波の理論を確立することは、海岸工学上きわめて重要であることを示して、本研究の立場を明らかにし、ついで本研究の研究方法与内容の概要を述べた。

第2章では、前述した目的のための浅海における有限振幅波理論の試みとして、まず非粘性非回転性を仮定し、流体力学の基礎方程式に通減せつ動法を適用してクノイド波理論を展開した。すなわち、水面変動および速度ポテンシャルに関する連立偏微分方程式を誘導したのち、定形進行波を表す波動解を取り扱い、Stokesの波速の定義を用いなくてクノイド波理論の第3次近似解を求めた。ついで、このクノイド波の波形、波速および水粒子速度をはじめ、エネルギー、エネルギーフラックス、質量輸送速度および極限波高に対する数学的表示を与えるとともに、第2次近似解においては基本波のほかに高周波成分波の発生可能性があることを示した。そして、波速および水平水粒子速度に関する各近似解ごとの数値計算によって、その収束性を検討し、またLaitoneのクノイド波理論との比較を行った結果、無次元周期  $T\sqrt{g/h} \geq 10$  の範囲において良好な収束性が見られ、解として十分信頼できるものであることを明らかにするとともに、Laitoneの理論との相違点を示した。さらに、波のエネルギーおよびエネルギーフラックスについても同様にこの近似解の収束性が良好であり、またこれらに及ぼす波の非線形性の影響が著しいことを見出した。著者の理論によれば、Euler座標においても波の進行方向の質量輸送が存在し、全水深にわたって分布する。これはLagrange座標における質量輸送速度の分布ともよく対応し、それらの全質量輸送量は、第2次近似解では両者完全に一致することが確かめられた。最後に、Rankine-Stokesの極限波の条件を用いて著者のクノイド波理論による極限波高の計算を行った結果、極限波高と水深との比  $H_{max}/h$  が無次元周期  $T\sqrt{g/h}$  の関数として与えられ、とくに第3次近似解によれば、 $T\sqrt{g/h}$  の増大に伴って孤立波の極限波高・水深比  $H_{max}/h = 0.846$  に収束することを見出したが、この値はByatt-Smithによる厳密解および高次近似解から想定された値にきわめて近いものである。

一方、有限振幅波理論の適用性を確かめるための定形進行波の特性に関する実験においては、波形のみならず波の質量輸送の一様性および定常性を確保すべきことを示したのち、このための新波浪水槽を試作

し、有限振幅波の波形、波速および質量輸送速度に関する詳細な実験を行った。その結果、測定された時間波形を理論波形と比較してその一致を確かめたのち、波速および質量輸送速度に関する理論結果と比較を行ったが、まず波速は従来の Stokes 波およびクノイド波理論によるものより若干大きくなり、著者のクノイド波理論によるものと実験の範囲内ではよく一致することが確かめられた。波の質量輸送速度に対しては、その方向は波の進行方向と一致し、鉛直分布はほぼ一様で著者の第 2 次または第 3 次近似解による理論結果とはほぼ一致し、また、平均の質量輸送速度に関しては、無次元周期  $T\sqrt{g/h} = 20, 25$  および 30 の場合に対して、第 3 次近似解による理論曲線と実験結果とがよく一致することがわかった。これらの比較から、著者の実験の範囲内で、このクノイド波理論の適用性を確認することができたが、なお適用範囲の究明に対しては追加すべき実験も少なくない。

第 3 章では、まず通減せつ動法の若干の一般化を行って、波の任意の分散性と非線形性を導入した基礎方程式の誘導が可能であることを示し、分散性が非線形性より卓越した場合に対して定形進行波に関するせつ動解を誘導して、その第 4 次近似解まで求めて、新しい一つの有限振幅波理論を展開した。そして、この波の特性が従来の Stokes 波に類似していることから、これを擬 Stokes 波と呼ぶことにした。ついで、前述したクノイド波理論の場合と同様に、波形、波速および水粒子速度をはじめ波のエネルギー、エネルギーフラックス、質量輸送速度および極限波に関する数学的表示を与えた。波形、波速、水粒子速度、エネルギーおよびエネルギーフラックスに関してこの近似解の収束性を数値計算の結果に基づいて検討するとともに、新しいクノイド波理論および Stokes 波理論と比較した結果、まず無次元周期  $T\sqrt{g/h} = 8 \sim 15$  の範囲ではその収束性は良好であり、また  $T\sqrt{g/h} = 10 \sim 15$  の範囲においては、新しいクノイド波理論とよく対応し、特に  $T\sqrt{g/h} = 10$  では両者ほぼ一致することを明らかにした。また、 $T\sqrt{g/h} = 8$  付近では、従来の Stokes 波理論とよく対応し、この理論がクノイド波理論と Stokes 波理論のちょうど中間的特性を持つことから、その適用範囲はおおよそ  $T\sqrt{g/h} = 8 \sim 15$  の範囲であるものと考えられた。さらに、擬 Stokes 波の質量輸送については、新しいクノイド波理論と同様に、Lagrange 座標のみならず、Euler 座標においても存在し、とくに前者に対しては  $T\sqrt{g/h} = 8$  付近で従来の Stokes 波理論によるものとはほとんど一致するが、 $T\sqrt{g/h}$  の値が大きくなると、新しいクノイド波理論によるものとよく対応して行くことがわかった。最後に、擬 Stokes 波の極限波に関しては、第 2 章と同様に、Rankine-Stokes の極限波の条件を用いて計算してその関係を見出し、クノイド波の極限波への移行を明らかにした。

第 4 章では、まず第 2 章および第 3 章で展開した有限振幅波理論を一樣流の場に拡張し、一樣流を伴うクノイド波および擬 Stokes 波理論の展開をそれぞれ第 3 次および第 4 次近似解まで行い、それらの波の特性を定式化した。ついで、波速および水平水粒子速度に関する近似解の収束性とそれらの特性に関する検討を数値計算結果に基づいて行ったが、波速に関しては無次元周期  $T\sqrt{g/h}$ 、水深・波高比  $h/H$  および一樣流の Froude 数  $F_F$  が大きくなるに従って収束性が著しく良好になることを見出した。また、水平水粒子速度についても同様な傾向が見られたが、波速の場合に比べてその収束性は若干劣ることを示した。一方、波速および水平水粒子速度に及ぼす一樣流の影響に関しては、波と流れの相互作用の効果が現われ、単なる重ね合わせは成立しないことを見出し、 $T\sqrt{g/h}$  および  $h/H$  が小さくなるに従って  $F_F$  の影響が大きくなることを示した。特に、逆流の場合には、 $F_F$  の影響が顕著となり、波の峯付近での水粒子速度が急激に

大きくなって不安定となり、 $T\sqrt{g/h}$ が小さく、かつ逆流の $F_r$ が大きくなるに従って極限波高は小さくなることを示した。最後に、共存系の場合での波の質量流束および運動量流束などの保存量の表示を与え、これらに対する流れの影響を検討した結果、波の運動量流束などの2次元に及ぼす波の質量輸送の影響が無視できなくなることを明らかにした。

第5章では、以上3章にわたって述べた有限振幅波理論の応用例として、水深および流速の変化に伴う波の変形をエネルギーフラックス法によって定式化し、その特性を明らかにした。その結果、まず傾斜海浜上の波の変形特性における近似解の収束性は良好であり、波の変形に及ぼす非線形性の影響は一般に著しく、また高次近似解ほど波速の定義の影響が現われることを明らかにした。ついで、流れのある傾斜海浜上での波の変形においても、この近似解の収束性は良好であり、順流の場合に有限振幅波の特性が現われるが、逆流の場合にはむしろ微小振幅波理論によるものに近づくことを示した。一定水深で流速を変化させた場合の波の変形では、水深・沖波波長比 $h/L_0$ が小さく、かつ沖波波形こう配 $H_0/L_0$ が大きくなるに従って、波に及ぼす流れの影響は非線形性の増大のために小さくなる傾向にあることを示した。

以上、著者は本論文において、浅海における有限振幅波の特性を究明するために、従来の有限振幅波理論における波速の任意性を解決しようという観点から、逓減せつ動法を適用してクノイド波および擬 Stokes 波理論を展開し、有限振幅波の特性を定式化した。そして、その応用例として、これらの理論を用いて波の変形特性を定式化した。これらの成果は浅海における有限振幅波の特性とそれに伴う水理現象とくに海浜流、漂砂などの輸送現象の究明に大きく寄与するものと信ずる。

最後に、本研究を遂行するにあたり、その全過程にわたり終始一貫して暖かい御指導と御助言を賜った京都大学防災研究所土屋義人教授に深甚なる感謝の意を表すとともに、終始暖かい御激励をいただいた京都大学工学部岩垣雄一教授、有限振幅波理論の展開において有益な御助言と御指導をいただいた同工学部上田顕教授および名古屋大学理学部谷内俊弥教授に心から深謝の意を表明する。さらに、著者が海岸工学を専攻して以来、変らぬ御教示、御鞭撻をいただいた岐阜大学増田重臣名誉教授に厚く謝意を表す次第である。また、本研究を実施するにあたり、御助言、御協力をいただいた愛媛大学工学部山口正隆助教授をはじめ、京都大学防災研究所山下隆男助手および同研究所海岸災害部門の諸氏に感謝する。

正 誤 表

ページ	行	誤	正
3	17行目	あい味	あいまい
10	式(2.5)	$t^* = t \frac{g}{\sqrt{h}}$	$t^* = t \sqrt{\frac{g}{h}}$
10	6行目	reductive perturbation	reductive perturbation method
14	13行目	鉛直水粒速度	鉛直水粒子速度
18	13行目	式(2.50)	式(2.53)
18	式(2.61)	$\eta_2 = \theta^{1/2}$	$\eta_2 = \theta^{1/2} v_{\dots}$
27	式(2.120)	$\lambda \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\}$	$\lambda \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\}$
31	式(2.132)	$\frac{1}{128k^4} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left( \frac{E}{K} \right) \{ \dots$	$\frac{1}{128k^4} \left( \frac{H}{h} \right)^2 \left( \frac{E}{K} \right) \{ \dots$
38	4行目	表われない	現れない
39	12行目	近使解	近似解
40	式(2.149)	$\varepsilon^1 (\eta_2^2 + 2\eta_1 \eta_3)$	$\varepsilon^4 (\eta_2^2 + 2\eta_1 \eta_3)$
41	式(2.154)	$\frac{W}{\rho g h^2}$	$\frac{W}{\rho g h^2 \sqrt{g h}}$
54	式(2.175)	$(\cosh 4\pi(h+z)/L$	$\cosh 4\pi(h+z)/L$
56	式(2.176)	$\sqrt{\frac{u}{gh}} = \frac{H}{h} \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\}$	$\sqrt{\frac{u}{gh}} = \left( \frac{H}{h} \right) \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left( \frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\}$
70	4行目	必要であり	必要があり
	24行目	2) Stokes, G. G.	2) Stokes, G. G.
82	式(3.42)	$\sigma A_{21} \cos \vartheta + \sigma B_{21} \sin \vartheta$	$\vartheta A_{21} \cos \vartheta + \vartheta B_{21} \sin \vartheta$
83	式(3.52)	$\sigma A_{31} \cos \vartheta + \sigma B_{31} \sin \vartheta$	$\vartheta A_{31} \cos \vartheta + \vartheta B_{31} \sin \vartheta$
86	式(3.71)	$\frac{29}{360} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4$	$\frac{19}{360} \left( \frac{2\pi h}{L} \right)^4$
87	8行目	擬Stokes 派の特性	擬Stokes 波の特性
94	式(3.78)	$dzdt$	$dzdt \}$
97	18行目	Euler 座による	Euler 座標による
100	図-3.10	管理輸送速度	質量輸送速度
116	3行目	水深・波長比	水深・波高比
132	式(5.6)	$+\frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d+\delta_0)^2}$	$-\frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d+\delta_0)^2}$
133	式(5.8)	$+\frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d+\delta_0)^2}$	$-\frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d+\delta_0)^2}$
133	式(5.10)	$+\frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d+\delta_0)^2}$	$-\frac{Q_0 Q^2}{2\rho^2(d+\delta_0)^2}$
133	式(5.13)	$-\frac{Q_0 Q^2}{(\rho h)^2}$	$-\frac{Q_0 Q^2}{2(\rho h)^2}$
139	13行目	抑えられこと	抑えられること